

This figure "NP12.jpg" is available in "jpg" format from:

<http://arXiv.org/ps/0709.1645v1>

This figure "NP16.jpg" is available in "jpg" format from:

<http://arXiv.org/ps/0709.1645v1>

On Zeta Functions and Families of Siegel Modular Forms

Alexei PANCHISHKIN

Abstract

Let p be a prime, and let $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ be the Siegel modular group of genus g . We study p -adic families of zeta functions and Siegel modular forms.

L -functions of Siegel modular forms are described in terms of motivic L -functions attached to Sp_g , and their analytic properties are given. Critical values for the spinor L -functions and p -adic constructions are discussed. Rankin's lemma of higher genus is established. A general conjecture on a lifting from $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ to GSp_{4m} (of genus $g = 4m$) is formulated.

Constructions of p -adic families of Siegel modular forms are given using Ikeda-Miyawaki constructions.

Contents

1	Introduction	1
2	L-functions of Siegel modular forms	2
3	Motivic L-functions for Sp_n, and their analytic properties	3
4	Critical values, periods and p-adic L-functions for Sp_3	5
5	Rankin's Lemma of higher genus	5
6	A lifting from $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ to GSp_{4m} of genus $g = 4m$	10
7	Constructions of p-adic families of Siegel modular forms	12
8	Ikeda-Miyawaki constructions and their p-adic versions	15

1 Introduction

The present article is based on some recent talks of the author, especially the talk in Moscow University on February 2, 2007, for the International conference "Diophantine and Analytical Problems in Number Theory" for 100th birthday of A.O. Gelfond.

Let $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{Z})$ be the Siegel modular group of genus g . Let p be a prime, $\mathbf{T}(p) = \mathbf{T}(\underbrace{1, \dots, 1}_g, \underbrace{p, \dots, p}_g)$ the Hecke p -operator, and $[\mathbf{p}]_g = p\mathbf{I}_{2g} = \mathbf{T}(\underbrace{p, \dots, p}_{2g})$ the scalar Hecke operator for Sp_g .

We discuss the following topics:

- 1) L -functions of Siegel modular forms

- 2) Motivic L -functions for Sp_g , and their analytic properties
- 3) Critical values and p -adic constructions for the spinor L -functions
- 4) Rankin's Lemma of higher genus
- 5) A lifting from $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ to GSp_{4m} (of genus $g = 4m$)
- 6) Constructions of p -adic families of Siegel modular forms
- 7) Ikeda-Miyawaki constructions and their p -adic versions

2 L -functions of Siegel modular forms

The Fourier expansion of a Siegel modular form.

Let $f = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a(\mathcal{T})q^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_k^n$ be a Siegel modular form of weight k and of genus n on the Siegel upper-half plane $\mathbb{H}_n = \{z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Recall some basic facts about the formal *Fourier expansion* of f , which uses the symbol

$$q^{\mathcal{T}} = \exp(2\pi i \mathrm{tr}(\mathcal{T}z)) = \prod_{i=1}^n q_{ii}^{\mathcal{T}_{ii}} \prod_{i < j} q_{ij}^{2\mathcal{T}_{ij}}$$

$\in \mathbb{C}[[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$ [q_{ij}, q_{ij}^{-1}] $_{i,j=1, \dots, n}$, where $q_{ij} = \exp(2\pi(\sqrt{-1}z_{ij}))$, and \mathcal{T} is in the semi-group $B_n = \{\mathcal{T} = {}^t\mathcal{T} \geq 0 \mid \mathcal{T} \text{ half-integral}\}$.

Hecke operators and the spherical map

Recall that the local Hecke algebra over \mathbb{Z} , denoted by $\mathcal{L}_{n,\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)]$, is generated by the following $n+1$ Hecke operators

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(p) &:= T(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{p, \dots, p}_n), \\ \mathbf{T}_i(p^2) &:= T(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i, \underbrace{p^2, \dots, p^2}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\mathbf{T}_n(p^2) = [\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]_n = T(\underbrace{p, \dots, p}_{2n}) = p\mathbf{I}_{2n}$ and the spherical map $\Omega : \mathcal{L}_{n,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)] \rightarrow \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ is a certain injective ring morphism.

Satake parameters of an eigenfunction of Hecke operators

Suppose that $f \in \mathcal{M}_k^n$ an eigenfunction of all Hecke operators $f \mapsto f|T$, $T \in \mathcal{L}_{n,p}$ for all primes p , hence $f|T = \lambda_f(T)f$.

Then all the numbers $\lambda_f(T) \in \mathbb{C}$ define a homomorphism $\lambda_f : \mathcal{L}_{n,p} \rightarrow \mathbb{C}$ given by a $(n+1)$ -tuple of complex numbers $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ (the Satake parameters of f), in such a way that

$$\lambda_f(T) = \Omega(T)(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

In particular, one has

$$\begin{aligned}\lambda_f([\mathbf{p}]) &= \alpha_0^2 \alpha_1 \cdots \alpha_n = p^{kn - n(n+1)/2} \\ \lambda_f(\mathbf{T}(p)) &= \Omega(\mathbf{T}(p)) = \alpha_0(1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n) = \sum_{j=0}^n \alpha_0 s_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).\end{aligned}$$

L-functions, functional equation and motives for Sp_n (see [Pa94], [Yosh01])

One defines

- $Q_{f,p}(X) = (1 - \alpha_0 X) \prod_{r=1}^n \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (1 - \alpha_0 \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} X),$
- $R_{f,p}(X) = (1 - X) \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1} X)(1 - \alpha_i X) \in \mathbb{Q}[\alpha_0^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}][X].$

Then the spinor L -function $L(\mathrm{Sp}(f), s)$ and the standard L -function $L(\mathrm{St}(f), s, \chi)$ of f (for $s \in \mathbb{C}$, and for all Dirichlet characters) χ are defined as the Euler products

- $L(\mathrm{Sp}(f), s, \chi) = \prod_p Q_{f,p}(\chi(p)p^{-s})^{-1}$
- $L(\mathrm{St}(f), s, \chi) = \prod_p R_{f,p}(\chi(p)p^{-s})^{-1}$

3 Motivic L -functions for Sp_n , and their analytic properties

Relations with L -functions and motives for Sp_n

Following [Pa94] and [Yosh01], these functions are conjectured to be motivic for all $k > n$:

$$L(\mathrm{Sp}(f), s, \chi) = L(M(\mathrm{Sp}(f))(\chi), s), L(\mathrm{St}(f), s) = L(M(\mathrm{St}(f))(\chi), s), \text{ where}$$

and the motives $M(\mathrm{Sp}(f))$ and $M(\mathrm{St}(f))$ are *pure* if f is a genuine cusp form (not coming from a lifting of a smaller genus):

- $M(\mathrm{Sp}(f))$ is a motive over \mathbb{Q} with coefficients in $\mathbb{Q}(\lambda_f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ of rank 2^n , of weight $w = kn - n(n+1)/2$, and of Hodge type $\bigoplus_{p,q} H^{p,q}$, with

$$\begin{aligned}p &= (k - i_1) + (k - i_2) + \cdots + (k - i_r), \\ q &= (k - j_1) + (k - j_2) + \cdots + (k - j_s), \text{ where } r + s = n, \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r &\leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq n, \\ \{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_s\} &= \{1, 2, \dots, n\};\end{aligned}\tag{3.1}$$

- $M(\mathrm{St}(f))$ is a motive over \mathbb{Q} with coefficients in $\mathbb{Q}(\lambda_f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ of rank $2n+1$, of weight $w = 0$, and of Hodge type $H^{0,0} \bigoplus_{i=1}^n (H^{-k+i, k-i} \oplus H^{k-i, -k+i})$.

A functional equation

Following general Deligne's conjecture [De79] on the motivic L -functions, the L -function satisfy a functional equation determined by the Hodge structure of a motive:

$$\Lambda(Sp(f), kn - n(n+1)/2 + 1 - s) = \varepsilon(f) \Lambda(Sp(f), s), \text{ where}$$

$$\Lambda(Sp(f), s) = \Gamma_{n,k}(s) L(Sp(f), s), \varepsilon(f) = (-1)^{k2^{n-2}},$$

$\Gamma_{1,k}(s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$, $\Gamma_{2,k}(s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2)$, and
 $\Gamma_{n,k}(s) = \prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p) \Gamma_{\mathbb{R}}^{a_+}(s-(w/2)) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-(w/2))^{a_-}$ for some non-negative integers a_+ and a_- , with $a_+ + a_- = w/2$, and $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$.

In particular, for $n = 3$ and $k \geq 5$, this conjectural functional equation has the form $\Lambda(Sp(f), s) = \Lambda(Sp(f), 3k-5-s)$, where

$$\Lambda(Sp(f), s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+3) \Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+1) L(Sp(f), s).$$

For $k \geq 5$ the critical values in the sense of Deligne [De79] are :

$$s = k, \dots, 2k-5.$$

A study of the analytic properties of $L(Sp(f), s)$

(compare with [Vo]).

One could try to use a link between the eigenvalues $\lambda_f(T)$ and the Fourier coefficients $a_f(\mathcal{T})$, where $T \in \mathcal{D}(\Gamma, S)$ runs through the Hecke operators, and $\mathcal{T} \in B_n$ runs over half-integral symmetric matrices. It was found by A.N. Andrianov (see [An67]) that

$$D(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \mathbf{T}(p^\delta) X^\delta = \frac{E(X)}{F(X)},$$

where

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 - p^2 (\mathbf{T}_2(p^2) + (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)[\mathbf{p}]_3) X^2 + (p + 1)p^4 \mathbf{T}(p)[\mathbf{p}]_3 X^3 \\ &\quad - p^7 [\mathbf{p}]_3 (\mathbf{T}_2(p^2) + (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)[\mathbf{p}]_3) X^4 + p^{15} [\mathbf{p}]_3^3 X^6 \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}[X]. \end{aligned}$$

Computing a formal Dirichlet series

Knowing $E(X)$, one computes the following formal Dirichlet series

$$D_E(s) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{T}_E(h) h^{-s} = \prod_p D_{E,p}(p^{-s}), \text{ where}$$

$$D_{E,p}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \mathbf{T}_E(p^\delta) X^\delta = \frac{D_p(X)}{E(X)} = \frac{1}{F(X)} \in \mathcal{D}(\Gamma, S)[[X]].$$

Main identity

For all \mathcal{T} one obtains the following identity

$$a_f(\mathcal{T})L(Sp(f), s) = \sum_{h=1}^{\infty} a_f(\mathcal{T}, E, h)h^{-s}, \text{ where}$$

$$f|\mathbf{T}_E(h) = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a_f(\mathcal{T}, E, h)q^{\mathcal{T}}.$$

Indeed, one has

$$f|\mathbf{T}_E(h) = \lambda_f(\mathbf{T}_E(h))f, \text{ and } L(Sp(f), s) = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_f(\mathbf{T}_E(h))h^{-s}, \text{ hence}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} f|\mathbf{T}_E(h)h^{-s} = L(Sp(f), s) \cdot f = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a_f(\mathcal{T}, E, h)h^{-s}q^{\mathcal{T}},$$

and it suffices to compare the Fourier coefficients. Such an identity is an unavoidable step in the problem of analytic continuation of $L(Sp(f), s)$ and in the study of its arithmetical implications: one obtains a mean of computing special values out of Fourier coefficients.

For the standard L -function $L(St(f), s)$, (see [Pa94], [CourPa], and [Boe-Schm]).

4 Critical values, periods and p -adic L -functions for Sp_3

Critical values, periods and p -adic L -functions for Sp_3

A general conjecture by Coates, Perrin-Riou (see [Co-PeRi], [Co], [Pa94]), predicts that for $n = 3$ and $k > 5$, the motivic function $L(Sp(f), s)$, admits a p -adic analogue. Let us fix an embedding $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$, and let $\alpha_0(p)$ be an inverse root of $Q_{f,p}$ with the smallest p -valuation.

- The *Panchishkin condition* (see [Ha-Li-Sk], [Pa94], [PaAnnIF94]) for the existence of bounded p -adic L -functions in this case takes the form $\text{ord}_p(\alpha_0(p)) = 0$ ($\alpha_0(p)$ is an inverse root with the smallest p -valuation). Recall that this condition says:

*for a pure motive M of rank d ,
Newton p -polygone at $(d/2)$ = Hodge polygone at $(d/2)$*

- Otherwise, one obtains p -adic L -functions of logarithmic growth $o(\log^h(\cdot))$ with $h = [\text{ord}_p(\alpha_0(p))] + 1$, $2\text{ord}_p(\alpha_0(p))$ = the difference
Newton p -Polygone at $(d/2)$ – Hodge Polygone at $(d/2)$

For the unitary groups, this condition for the existence of p -adic L -functions was discussed in [Ha-Li-Sk].

5 Rankin's Lemma of higher genus

Our next purpose is to evaluate the generating series

$$D_p^{(1,1)}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta) X^\delta \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \llbracket X \rrbracket.$$

in terms of Hecke algebra generators $\mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(p) \otimes 1, \quad \mathbf{T}_1(p^2) \otimes 1, \quad [\mathbf{p}] \otimes 1, \\ 1 \otimes \mathbf{T}(p), \quad 1 \otimes \mathbf{T}_1(p^2), \quad 1 \otimes [\mathbf{p}]. \end{aligned}$$

Theorem 5.1 ([PaVaRnk]) *For genus $n = 2$, we have the following explicit representation*

$$D_p^{(1,1)}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta) X^\delta = (1 - p^6 [\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}] X^2) \frac{R(X)}{S(X)}, \text{ where}$$

$$R(X) = 1 + r_1 X + \dots + r_{12} X^{12}, \quad \text{with } r_1 = r_{11} = 0,$$

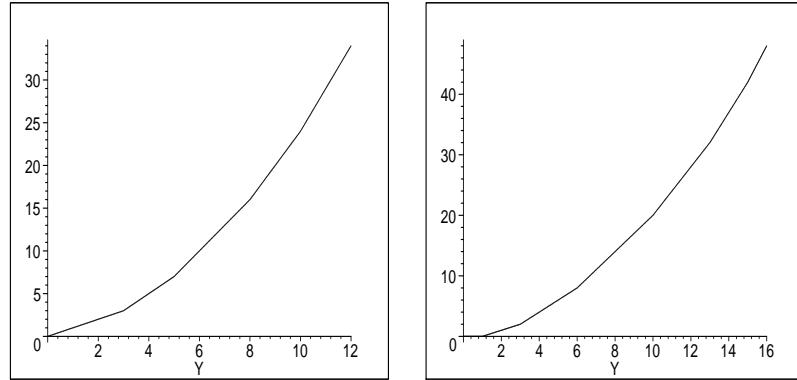
$$S(X) = 1 + s_1 X + \dots + s_{16} X^{16},$$

$$R(X), S(X) \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[X],$$

where r_i and s_i are given in the Appendix of [PaVaRnk]

Here we give the Newton polygons of $R(X)$ and $S(X)$ with respect to powers of p and X (see Figure 1). It follows from our computation that all slopes are *integral*. We hope that these polygons

Figure 1: Newton polygons of $R(X)$ and $S(X)$ with respect to powers of p and X , of heights 34 and 48, resp.



could help to find some geometric objects attached to the polynomials $R(X)$ and $S(X)$, in the spirit of a recent work of C.Faber and G.Van Der Geer, [FVdG].

A half of coefficients: s_9, \dots, s_{16} can be found using this simple functional equation :

$$s_{16-i} = (p^6 \mathbf{T}_2(p^2) \otimes \mathbf{T}_2(p^2))^{8-i} s_i \quad (i = 0, \dots, 8).$$

Proof: Recall that

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega^{(n=2)}(T(p^\delta)) X^\delta = \frac{1 - \frac{x_0^2 x_1 x_2}{p} X^2}{(1 - x_0 X)(1 - x_0 x_1 X)(1 - x_0 x_2 X)(1 - x_0 x_1 x_2 X)}$$

From this series it is possible to obtain a formula for $\Omega(T(p^\delta))$ considering four geometric progressions

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (x_0 X)^{\nu_1} &= \frac{1}{1 - x_0 X}, & \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (x_0 x_1 X)^{\nu_2} &= \frac{1}{1 - x_0 x_1 X} \\ \sum_{\nu_3=0}^{\infty} (x_0 x_2 X)^{\nu_3} &= \frac{1}{1 - x_0 x_2 X}, & \sum_{\nu_4=0}^{\infty} (x_0 x_1 x_2 X)^{\nu_4} &= \frac{1}{1 - x_0 x_1 x_2 X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_x(T(p^\delta)) &= p^{-1} x_0^\delta (p x_1^{(3+\delta)} x_2 - p x_1 x_2^{(3+\delta)} - p x_1^{(2+\delta)} + p x_2^{(2+\delta)} - p x_1^{(3+\delta)} x_2^{(2+\delta)} \\ &\quad + p x_1^{(2+\delta)} x_2^{(3+\delta)} + p x_1 - p x_2 - x_1^{(2+\delta)} x_2^2 + x_1^{(1+\delta)} x_2 + x_1^{(2+\delta)} x_2^{(1+\delta)} - x_1^{(1+\delta)} x_2^{(2+\delta)} \\ &\quad + x_1^2 x_2^{(2+\delta)} - x_1 x_2^{(1+\delta)} - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) / ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(x_1 - x_2)) \\ &= -p^{-1} x_0^\delta ((1 - x_1 x_2)(p x_1 - x_2) x_1^{(\delta+1)} + (1 - x_1 x_2)(x_1 - p x_2) x_2^{(\delta+1)} \\ &\quad - (1 - p x_1 x_2)(x_1 - x_2)(x_1 x_2)^{(\delta+1)} - (p - x_1 x_2)(x_1 - x_2)) / \\ &\quad ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

Tensor product of local Hecke algebras

We use a second group of variables y_0, y_1, y_2 and Ω_y in order to obtain a tensor product of local Hecke algebras

$$\begin{aligned} \Omega_x^{(n)} \otimes \Omega_y^{(n)} : \mathcal{L}_{n, \mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{n, \mathbb{Q}} &\rightarrow \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_n], \text{ et} \\ \Omega_y^{(2)}(T(p^\delta)) &:= \Omega_x^{(2)}(T(p^\delta))|_{x=y} \end{aligned}$$

The product of two polynomials $\Omega_x^{(2)}(T(p^\delta))$ and $\Omega_y^{(2)}(T(p^\delta))$ is computed straightforward :

$$\begin{aligned} \Omega_x^{(2)}(T(p^\delta)) \cdot \Omega_y^{(2)}(T(p^\delta)) &= p^{-2} x_0^\delta y_0^\delta (p x_1^{(3+\delta)} x_2 - p x_1^{(2+\delta)} - p x_1^{(3+\delta)} x_2^{(2+\delta)} \\ &\quad + p x_1^{(2+\delta)} x_2^{(3+\delta)} - p x_1 x_2^{(3+\delta)} + p x_2^{(2+\delta)} + p x_1 - p x_2 - x_1^{(2+\delta)} x_2^2 + x_1^{(1+\delta)} x_2 \\ &\quad + x_1^{(2+\delta)} x_2^{(1+\delta)} - x_1^{(1+\delta)} x_2^{(2+\delta)} + x_1^2 x_2^{(2+\delta)} - x_1 x_2^{(1+\delta)} - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) \\ &\quad \times (p y_1^{(3+\delta)} y_2 - p y_1^{(2+\delta)} - p y_1^{(3+\delta)} y_2^{(2+\delta)} + p y_1^{(2+\delta)} y_2^{(3+\delta)} - p y_1 y_2^{(3+\delta)} \\ &\quad + p y_2^{(2+\delta)} + p y_1 - p y_2 - y_1^{(2+\delta)} y_2^2 + y_1^{(1+\delta)} y_2 + y_1^{(2+\delta)} y_2^{(1+\delta)} \\ &\quad - y_1^{(1+\delta)} y_2^{(2+\delta)} + y_1^2 y_2^{(2+\delta)} - y_1 y_2^{(1+\delta)} - y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2) / \\ &\quad ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(y_1 - y_2)) \end{aligned}$$

Summation of obtained expression give the following result :

$$\begin{aligned}
& (\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X)) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega_x^{(2)}(T(p^\delta)) \cdot \Omega_y^{(2)}(T(p^\delta)) X^\delta = \\
& - \frac{(p x_1 - x_2)(1 - p y_1 y_2) x_1 y_1 y_2}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 y_1 y_2 X)} \\
& + \frac{x_2 y_1 (x_1 - p x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_2 y_0 y_1 X)} \\
& + \frac{x_2 y_2 (x_1 - p x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 y_0 x_2 y_2 X)} \\
& - \frac{x_2 y_1 y_2 (x_1 - p x_2)(1 - p y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_2 y_0 y_1 y_2 X)} \\
& - \frac{x_1 (p x_1 - x_2)(p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 X)} \\
& - \frac{x_1 x_2 y_1 (1 - p x_1 x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 y_1 X)} \\
& - \frac{x_1 x_2 y_2 (1 - p x_1 x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 y_2 X)} \\
& + \frac{y_1 y_2 (p - x_1 x_2)(1 - p y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 y_0 y_1 y_2 X)} \\
& + \frac{x_1 x_2 (1 - p x_1 x_2)(p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 X)} \\
& - \frac{x_1 y_1 (p x_1 - x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 y_1 X)} \\
& + \frac{x_1 y_2 (p x_1 - x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 y_2 X)} \\
& - \frac{x_2 (x_1 - p x_2)(p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_2 y_0 X)} \\
& + \frac{x_1 x_2 y_1 y_2 (1 - p x_1 x_2)(1 - p y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 y_1 y_2 X)} \\
& + \frac{(p - x_1 x_2)(p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 y_0 X)} \\
& - \frac{y_1 (p - x_1 x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 y_0 y_1 X)} \\
& - \frac{y_2 (p - x_1 x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 y_0 y_2 X)}.
\end{aligned}$$

Properties of the image $(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X))$

We checked by an explicit computation that the polynomials, which do not depend of X in the denominator of the image $(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X))$, disappear after simplification in the ring $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2][X]$, and the common denominator becomes :

$$\begin{aligned}
& (1 - x_0 y_0 X)(1 - x_0 y_0 x_1 X)(1 - x_0 y_0 y_1 X)(1 - x_0 y_0 x_2 X)(1 - x_0 y_0 y_2 X) \\
& (1 - x_0 y_0 x_1 y_1 X)(1 - x_0 y_0 x_1 x_2 X)(1 - x_0 y_0 x_1 y_2 X)(1 - x_0 y_0 y_1 x_2 X) \\
& (1 - x_0 y_0 y_1 y_2 X)(1 - x_0 y_0 x_2 y_2 X)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 X)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 y_2 X) \\
& (1 - x_0 y_0 x_1 x_2 y_2 X)(1 - x_0 y_0 y_1 x_2 y_2 X)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2 X).
\end{aligned}$$

Moreover, we found that the numerator consists of the factor $(1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 x_2 y_2 X^2)$ and a polynomial in X of degree 12 with coefficients in $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]$ (the constant term is equal to 1 and the main term is $p^{-2} x_0^{12} y_0^{12} x_1^6 x_2^6 y_1^6 y_2^6 X^{12}$). We also found that the factor of degree 12 does not contain terms of degree 1 and 11 in X .

It follows that $(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X)) = \frac{(1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 x_2 y_2 X^2) R_{x,y}(X)}{S_{x,y}(X)}$, where $R_{x,y}(X) = 1 + r_{2,x,y} X^2 + \dots + r_{10,x,y} X^{10} + r_{12,x,y} X^{12}$ and $S_{x,y}(X) = 1 + s_{1,x,y} X + \dots + s_{16,x,y} X^{16} \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, X]$.

Expression through the Hecke operators

Knowing the coefficients of $R_{x,y}(X), S_{x,y}(X) \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, X]$ (the images under $\Omega_x \otimes \Omega_y$) one can reconstruct $R(X) = 1 + r_2 X^2 + \dots + r_{10} X^{10} + r_{12} X^{12}$ and $S(X) = 1 + s_1 X + \dots + s_{16} X^{16} \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[X]$.

Using the images of the generators

$$\Omega_x(\mathbf{T}(p)^{\lambda_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\lambda_1} [\mathbf{p}]^{\lambda_2}) \Omega_y(\mathbf{T}(p)^{\mu_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\mu_1} [\mathbf{p}]^{\mu_2}),$$

we build and solve a linear system of undetermined coefficients $K_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2}$ expressing all monomials $\Omega_x(\mathbf{T}(p)^{\lambda_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\lambda_1} [\mathbf{p}]^{\lambda_2}) \Omega_y(\mathbf{T}(p)^{\mu_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\mu_1} [\mathbf{p}]^{\mu_2})$, up to degree 12 for $R_{x,y}(X)$ (≤ 16 for $S_{x,y}(X)$) in x_0 and in y_0 . \square

Comparison with the case of genus $n = 1$

The factor $(1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 x_2 y_2 X^2)$ of degree 2 in X is very similar to the one in case of $g = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega_x^{(1)}(T(p^\delta)) \cdot \Omega_y^{(1)}(T(p^\delta)) X^\delta &= \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{x_0^\delta (1 - x_1^{(1+\delta)})}{1 - x_1} \cdot \frac{y_0^\delta (1 - y_1^{(1+\delta)})}{1 - y_1} X^\delta \\ &= \frac{1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 X)} - \frac{y_1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 y_1 X)} \\ &\quad - \frac{x_1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 x_1 X)} + \frac{x_1 y_1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 X)} \\ &= \frac{1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 X^2}{(1 - x_0 y_0 X)(1 - x_0 y_0 x_1 X)(1 - x_0 y_0 y_1 X)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 X)}. \\ \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta) X^\delta &= (1 - p^2 [\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}] X^2) \times \\ &\quad \times (1 - \mathbf{T}(p) \otimes \mathbf{T}(p) X + (p \mathbf{T}(p)^2 \otimes [\mathbf{p}] + p [\mathbf{p}] \otimes \mathbf{T}(p)^2 - 2p^2 [\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}]) X^2 \\ &\quad - p^2 \mathbf{T}(p) [\mathbf{p}] \otimes \mathbf{T}(p) [\mathbf{p}] X^3 + p^4 [\mathbf{p}]^2 \otimes [\mathbf{p}]^2 X^4)^{-1}. \end{aligned}$$

6 A lifting from $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ to GSp_{4m} of genus $g = 4m$

Motive of the Rankin product of genus $n = 2$

Let f and g be two Siegel cusp eigenforms of weights k and l , $k > l$, and let $M(Sp(f))$ and $M(Sp(g))$ be the (conjectural) spinor motives of f and g . Then $M(Sp(f))$ is a motive over \mathbb{Q} with coefficients in $\mathbb{Q}(\lambda_f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ of rank 4, of weight $w = 2k - 3$, and of Hodge type $H^{0,2k-3} \oplus H^{k-2,k-1} \oplus H^{k-1,k-2} \oplus H^{2k-3,0}$, and $M(Sp(g))$ is a motive over \mathbb{Q} with coefficients in $\mathbb{Q}(\lambda_g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ of rank 4, of weight $w = 2l - 3$, and of Hodge type $H^{0,2l-3} \oplus H^{l-2,l-1} \oplus H^{l-1,l-2} \oplus H^{2l-3,0}$.

For another Siegel modular form, an eigenfunction of Hecke operators $g \in \mathcal{M}_l^n$ consider the corresponding homomorphism $\lambda_g : \mathcal{L}_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}$ given by its Satake parameters $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ of g , and let $\lambda_f \otimes \lambda_g : \mathcal{L}_{n,p} \otimes \mathcal{L}_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}$

The tensor product $M(Sp(f)) \otimes M(Sp(g))$

is a motive over \mathbb{Q} with coefficients in $\mathbb{Q}(\lambda_f(n), \lambda_g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ of rank 16, of weight $w = 2k + 2l - 6$, and of Hodge type

$$\begin{aligned} & H^{0,2k+2l-6} \oplus H^{l-2,2k+l-4} \oplus H^{l-1,2k+l-5} \oplus H^{2l-3,2k-3} \\ & H^{k-2,k+2l-4} \oplus H^{k+l-4,k+l-2} \oplus H_+^{k+l-3,k+l-3} \oplus H^{k+2l-5,k-1} \\ & H^{k-1,k+2l-5} \oplus H_-^{k+l-3,k+l-3} \oplus H^{k+l-2,k+l-4} \oplus H^{k+2l-4,k-2} \\ & H^{2k-3,2l-3} \oplus H^{2k+l-5,l-1} \oplus H^{2k+l-4,l-2} \oplus H^{2k+2l-6,0}. \end{aligned}$$

Motivic L -functions: analytic properties

Following Deligne's conjecture [De79] on motivic L -functions, applied for a Siegel cusp eigenform F for the Siegel modular group $Sp_4(\mathbb{Z})$ of genus $n = 4$ and of weight $k > 5$, one has $\Lambda(Sp(F), s) = \Lambda(Sp(F), 4k - 9 - s)$, where

$$\begin{aligned} \Lambda(Sp(F), s) &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 4)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 3)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 1) \\ &\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2k + 7)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2k + 6)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2k + 5)L(Sp(F), s), \end{aligned}$$

(compare this functional equation with that given in [An74], p.115).

On the other hand, for $m = 2$ and for two cusp eigenforms f and g for $Sp_2(\mathbb{Z})$ of weights k, l , $k > l + 1$, $\Lambda(Sp(f) \otimes Sp(g), s) = \varepsilon(f, g)\Lambda(Sp(f) \otimes Sp(g), 2k + 2l - 5 - s)$, $|\varepsilon(f, g)| = 1$, where

$$\begin{aligned} \Lambda(Sp(f) \otimes Sp(g), s) &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - l + 2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - l + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2) \\ &\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2l + 3)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k - l + 2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k - l + 3) \\ &\times L(Sp(f) \otimes Sp(g), s). \end{aligned}$$

We used here the Gauss duplication formula $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1)$. Notice that $a_+ = a_- = 1$ in this case, and the conjectural motive $M(Sp(f)) \otimes M(Sp(g))$ does not admit critical values.

A holomorphic lifting from $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ to GSp_{4m} : a conjecture

Conjecture 6.1 (on a lifting from $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ to GSp_{4m}) *Let f and g be two Siegel modular forms of genus $2m$ and of weights $k > 2m$ and $l = k - 2m$. Then there exists a Siegel modular form F of genus $4m$ and of weight k with the Satake parameters $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0, \gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2, \dots, \gamma_{2m} = \alpha_{2m}, \gamma_{2m+1} = \beta_1, \dots, \gamma_{4m} = \beta_{2m}$ for suitable choices $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ and $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ of Satake's parameters of f and g .*

One readily checks that the Hodge types of $M(Sp(f)) \otimes M(Sp(g))$ and $M(Sp(F))$ are the same (of rank 2^{4m}) (it follows from the above description (3.1), and from Künneth's-type formulas).

An evidence for this version of the conjecture comes from Ikeda-Miyawaki constructions ([Ike01], [Ike06], [Mur02]): let k be an even positive integer, $h \in S_{2k}(\Gamma_1)$ a normalized Hecke eigenform of weight $2k$, $F_{2n} \in S_{k+n}(\Gamma_{2n})$ the Ikeda lift of h of genus $2n$ (we assume $k \equiv n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{N}$).

Next let $f \in S_{k+n+r}(\Gamma_r)$ be an arbitrary Siegel cusp eigenform of genus r and weight $k+n+r$, with $n, r \geq 1$. If we take $n = m, r = 2m, k := k+m, k+n+r := k+3m$, then an example of the validity of this version of the conjecture is given by

$$\begin{aligned} (f, g) &= (f, F_{2m}(h)) \mapsto \mathcal{F}_{h,f} \in S_{k+3m}(\Gamma_{4m}), \\ (f, g) &= (f, F_{2m}) \in S_{k+3m}(\Gamma_{2m}) \times S_{k+m}(\Gamma_{2m}). \end{aligned}$$

Another evidence comes from Siegel-Eisenstein series

$$f = E_k^{2m} \text{ and } g = E_{k-2m}^{2m}$$

of even genus $2m$ and weights k and $k-2m$: we have then

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \alpha_1 = p^{k-2m}, \dots, \alpha_{2m} = p^{k-1}, \\ \beta_0 &= 1, \beta_1 = p^{k-4m}, \dots, \beta_{2m} = p^{k-2m-1}, \end{aligned}$$

then we have that

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = p^{k-4m}, \dots, \gamma_{2m} = p^{k-1},$$

are the Satake parameters of the Siegel-Eisenstein series $F = E_k^{4m}$.

Remark 6.2 *If we compare the L-function of the conjecture (given by the Satake parameters $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0, \gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2, \dots, \gamma_{2m} = \alpha_{2m}, \gamma_{2m+1} = \beta_1, \dots, \gamma_{4m} = \beta_{2m}$ for suitable choices $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ and $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ of Satake's parameters of f and g), we see that it corresponds to the tensor product of the spinor L-functions, and this function is not of the same type as that of the Yoshida's lifting [Yosh81], which is a certain product of Hecke's L-functions.*

We would like to mention in this context Langlands's functoriality: The denominators of our L-series belong to local Langlands L-factors (attached to representations of L-groups). If we consider the homomorphisms

$${}^L GSp_{2m} = GSpin(4m+1) \rightarrow GL_{2^{2m}}, \quad {}^L GSp_{4m} = GSpin(8m+1) \rightarrow GL_{2^{4m}},$$

we see that our conjecture is compatible with the homomorphism of L -groups

$$GL_{2^{2m}} \times GL_{2^{2m}} \rightarrow GL_{2^{4m}}, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \otimes g_2, GL_n(\mathbb{C}) = {}^L GL_n.$$

However, it is unclear to us if Langlands's functoriality predicts a holomorphic Siegel modular form as a lift.

7 Constructions of p -adic families of Siegel modular forms

Constructing p -adic L -functions and modular symbols

Together with complex parameter s it is possible to use certain p -adic parameters in order to construct L -functions and modular symbols. We study such parameters as the twist with Dirichlet character on one hand, and the weight parameter in the theory of families of modular forms on the other. An operation of the twist by a Dirichlet character is a fundamental operation concerning the formal power series, and the p -adic variation of such character gives an analytic family of modular forms. One computes the modular symbols related to an automorphic representation π of an algebraic group G over a number field, using the twists of automorphic L -functions $L(s, \pi \otimes \chi, r)$ with Dirichlet character χ . We represent their special values as integrals giving both complex-analytic and p -adic-analytic continuation. We construct analytic families of such L -functions in cases $G = GL_2 \times GL_2 \times GL_2$, $G = GL_2 \times GSp_{2m}$, $G = GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ using the doubling method and its p -adic versions, which expected to work also for overconvergent families of automorphic forms, and already developed in simpler situations $G = GL_2$ by R. Coleman, G. Stevens and others.

A p -adic approach

Consider Tate's field $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ for prime number p . Let us fix the embedding $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i_p} \mathbb{C}_p$ and consider the algebraic numbers as numbers p -adic over i_p . For a p -adic family $k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k)q^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[q]] \subset \mathbb{C}_p[[q]]$, the Fourier coefficients $a_n(k)$ of f_k and one of Satake p -parameters $\alpha(k) := \alpha_p^{(1)}(k)$ are given by the certain analytical p -adic functions $k \mapsto a_n(k)$ for $(n, p) = 1$. The archetypal example of p -adic family is given by the Eisenstein series.

$$a_n(k) = \sum_{d|n, (d, p)=1} d^{k-1}, f_k = E_k, \alpha_p^{(1)}(k) = 1, \alpha_p^{(2)}(k) = p^{k-1}.$$

The existence of the p -adic family of cusp forms of positive slope $\sigma > 0$ was shown by Coleman. We define the slope $\sigma = \text{ord}_p(\alpha_p^{(1)}(k))$ (and ask it to be constant in a p -adic neighborhood of weight k) An example for $p = 7$, $f = \Delta$, $k = 12$, $a_7 = \tau(7) = -7 \cdot 2392$, $\sigma = 1$ is given by R. Coleman in [CoPB].

Motivation for considering of p -adic families

comes from the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, see [Colm03]. For a cusp eigenform $f = f_2$, corresponding to an elliptic curve E by Wiles [Wi95], we consider a family containing f . One can try to approach $k = 2, s = 1$ from the direction, taking $k \rightarrow 2$, instead of $s \rightarrow 1$, this leads to a formula linking the derivative over s at $s = 1$ of the p -adic L -function with the derivative over k at $k = 2$ of the p -adic analytic function $\alpha_p(k)$, see in [CST98]: $L'_{p,f}(1) = \mathcal{L}_p(f)L_{p,f}(1)$

with $\mathcal{L}_p(f) = -2 \frac{d\alpha_p(k)}{dk} \big|_{k=2}$. The validity of this formula needs the existence of our two variable L -function, constructed in [PaTV].

In order to construct p -adic L -function of two variables (k, s) , the theory of p -adic integration is used. The H -admissible measures with integer H related to σ , which appear in this construction, are obtained from H -admissible measures with values in various rings of modular forms, in particular nearly holomorphic modular forms. Let us describe a typical example related to differential operators.

Nearly holomorphic modular forms and the method of canonical projection

Let \mathcal{A} be a commutative field. There are several p -adic approaches for studying special values of L -functions using the method of canonical projection (see [PaTV]). In this method the special values and modular symbols are considered as \mathcal{A} -linear forms over spaces of modular forms with coefficients in \mathcal{A} . Nearly holomorphic ([ShiAr]) modular forms are certain formal series

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a(n; R) q^n \in \mathcal{A}[[q]][R]$$

with the property for $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $z = x + iy \in \mathbb{H}$, $R = (4\pi y)^{-1}$, the series converge to a \mathcal{C}^∞ -modular form over \mathbb{H} of given weight k and Dirichlet character ψ . The coefficients $a(n; R)$ are polynomials in $\mathcal{A}[R]$ of bounded degree.

Triple products families

give a recent example of families on the algebraic group of higher rank. This aspect was studied by S. Boecherer and A. Panchishkin [Boe-Pa2006]. The triple product with Dirichlet character χ is defined as a complex L -function (Euler product of degree 8)

$$L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \prod_{p \nmid N} L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, \chi(p)p^{-s}),$$

where

$$L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, X)^{-1} = \det \left(1_8 - X \begin{pmatrix} \alpha_{p,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,1}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,2}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,3}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,3}^{(2)} \end{pmatrix} \right).$$

We use the corresponding normalized L -function (see [De79], [Co], [Co-PeRi]) :

$$\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_3 + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_2 + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_1 + 1) L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi),$$

where $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$. The Gamma-factor determines the *critical values* $s = k_1, \dots, k_2 + k_3 - 2$ of $\Lambda(s)$, which we explicitly evaluate (like in the classical formula $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$). A *functional equation* of $\Lambda(s)$ has the type

$$s \mapsto k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s.$$

Let us consider the product of three eigenvalues: $\lambda = \lambda(k_1, k_2, k_3) = \alpha_{p,1}^{(1)}(k_1) \alpha_{p,2}^{(1)}(k_2) \alpha_{p,3}^{(1)}(k_3)$ with the slope $\sigma = v_p(\lambda(k_1, k_2, k_3)) = \sigma(k_1, k_2, k_3) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ constant and positive for all triplets (k_1, k_2, k_3) in an appropriate p -adic neighbourhood of the fixed triplet of weights (k_1, k_2, k_3) .

The statement of the problem

for triple products is the following: *given three p -adic analytic families f_j of slope $\sigma_j \geq 0$, to construct a four-variable p -adic L -function attached to Garrett's triple product of these families.* We show that this function interpolates the special values $(s, k_1, k_2, k_3) \mapsto \Lambda(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, s, \chi)$ at critical points $s = k_1, \dots, k_2 + k_3 - 2$ for balanced weights $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$; we prove that these values are algebraic numbers after dividing by certain “periods”. However the construction uses directly modular forms, and not the L -values in question, and a comparison of special values of two functions is done *after the construction*.

Main result for triple products

- 1) The function $\mathcal{L}_f : (s, k_1, k_2, k_3) \mapsto \frac{\langle \mathbf{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle}{\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}_0 \rangle}$ depends p -adic analytically on four variables $(\chi \cdot y_p^r, k_1, k_2, k_3) \in X \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$;
- 2) Comparison of complex and p -adic values: for all (k_1, k_2, k_3) in an affinoid neighborhood $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3 \subset X^3$, satisfying $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$: the values at $s = k_2 + k_3 - 2 - r$ coincide with the normalized critical special values

$$L^*(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, k_2 + k_3 - 2 - r, \chi) \quad (r = 0, \dots, k_2 + k_3 - k_1 - 2),$$

for Dirichlet characters $\chi \bmod Np^v$, $v \geq 1$.

- 3) Dependence on $x \in X$: let $H = [\text{ord}_p(\lambda)] + 1$. For any fixed $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B}$ and $x = \chi \cdot y_p^r$ then the following linear form (representing modular symbols for triple modular forms)

$$x \mapsto \frac{\langle \mathbf{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle}{\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}_0 \rangle},$$

extends to a p -adic analytic function of type $o(\log^H(\cdot))$ of the variable $x \in X$.

A general program

We plan to extend this construction to other situations as follows :

- 1) Construction of modular distributions Φ_j with values in an infinite dimensional modular tower $\mathcal{M}(\psi)$.
- 2) Application of a canonical projector of type π_α onto a finite dimensional subspace $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$ of $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$.
- 3) General admissibility criterium. The family of distributions $\pi_\alpha(\Phi_j)$ with value in $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$ give a h -admissible measure $\tilde{\Phi}$ with value in a module of finite rank.
- 4) Application of a linear form ℓ of type of a modular symbol produces distributions $\mu_j = \ell(\pi_\alpha(\Phi_j))$, and an admissible measure from congruences between modular forms $\pi_\alpha(\Phi_j)$.
- 5) One shows that certain integrals $\mu_j(\chi)$ of the distributions μ_j coincide with certain L -values; however, these integrals are not necessary for the construction of measures (already done at stage 4).

- 6) One shows a result of uniqueness for the constructed h -admissible measures : they are determined by many of their integrals over Dirichlet characters (not all).
- 7) In most cases we can prove a functional equation for the constructed measure μ (using the uniqueness in 6), and using a functional equation for the L -values (over complex numbers, computed at stage 5).

This strategy is already applicable in various cases

8 Ikeda-Miyawaki constructions and their p -adic versions

Ikeda's lift

Ikeda generalized in 1999 (see [Ike01]) the Saito-Kurokawa lift of modular forms from one variable to Siegel modular forms of degree 2: under the condition that $n \equiv k(\text{mod}2)$ there exists a lifting from an eigenform $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$ to an eigenform $F \in S_{n+k}(\Gamma_{2n})$ such that the standard zeta function $L(St(F), s)$ of F (of degree $2n$) is given in terms of that of f by

$$\zeta(s) \prod_{j=1}^{2n} L(f; s + k + n - j).$$

(it was conjectured by Duke and Imamoglu in [DI98]). Notice that the Satake parameters of F can be chosen in the form $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2n}$, where

$$\beta_0 = p^{nk-n(n+1)/2}, \beta_i = \tilde{\alpha}p^{i-1/2} (i = 1, \dots, n), \beta_{n+i} = \tilde{\alpha}^{-1}p^{i-1/2},$$

and $(1 - \tilde{\alpha}p^{k-1/2}X)(1 - \tilde{\alpha}^{-1}p^{k-1/2}X) = 1 - a(p)X + p^{2k-1}X^2$, see [Mur02], Lemma 4.1, p.65 (so that $\alpha = \tilde{\alpha}p^{k-1/2}$, $\tilde{\alpha} = \alpha p^{1/2-k}$ in our previous notation).

Ikeda-Miyawaki conjecture

(it was conjectured by Miyawaki in [Mi92] and proved by Ikeda in [Ike06]).

Let k be an even positive integer, $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$ a normalized Hecke eigenform of weight $2k$, $F_2 \in S_{k+1}(\Gamma_2) = Maass(f)$ the Maass lift of f , and in general $F_{2n} \in S_{k+n}(\Gamma_{2n})$ the Ikeda lift of f (we assume $k \equiv n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{N}$). Next let $g \in S_{k+n+r}(\Gamma_r)$ be an arbitrary Siegel cusp eigenform of genus r and weight $k + n + r$, with $n, r \geq 1$. Then according to Ikeda-Miyawaki there exists a Siegel eigenform $\mathcal{F}_{f,g} \in S_{k+n+r}(\Gamma_{2n+r})$ such that

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}, St) = L(s, g, St) \prod_{j=1}^{2n} L(s + k + n - j, f)$$

(under a non-vanishing condition).

p -adic versions of Ikeda-Miyawaki constructions

Now consider a p -adic family

$$k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k)q^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[q]] \subset \mathbb{C}_p[[q]]$$

Fourier coefficients $a_n(k)$ of f_k and one of Satake p -parameters $\alpha(k) := \alpha_p^{(1)}(k)$ are given by the certain analytical p -adic functions $k \mapsto a_n(k)$ for $(n, p) = 1$.

Then the Fourier expansions of the modular forms $F = F_k$ and $\mathcal{F}_{f,g} = \mathcal{F}_{f_k,g}$ can be explicitly evaluated giving examples of p -adic Siegel modular forms of positive slope.

Notice that the Satake parameters of F are $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2n}$, where

$$\beta_0 = p^{nk-n(n+1)/2}, \beta_i = \alpha(k)p^{i-k}, \beta_{n+i} = \alpha(k)^{-1}p^{k+i-1} (i = 1, \dots, n).$$

Acknowledgement

It is a great pleasure for me to thank Siegfried Boecherer, Stephen Gelbart, Solomon Friedberg and Wadim Zudilin for valuable discussions and observations.

My special thanks go to Yuri Nesterenko for the invitation to the International conference "Diophantine and Analytical Problems in Number Theory" for 100th birthday of A.O. Gelfond in Moscow University, and for soliciting a paper for the proceedings.

References

- [An67] ANDRIANOV, A.N., *Shimura's conjecture for Siegel's modular group of genus 3*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 177 (1967), 755–758 = Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 1474–1478.
- [An69] ANDRIANOV, A.N., *Rationality theorems for Hecke series and zeta functions of the groups GL_n and SP_n over local fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., Tom 33 (1969), No. 3, (Math. USSR – Izvestija, Vol. 3 (1969), No. 3, pp. 439–476).
- [An70] ANDRIANOV, A.N., *Spherical functions for GL_n over local fields and summation of Hecke series*, Mat. Sbornik, Tom 83 (125) (1970), No 3, (Math. USSR Sbornik, Vol. 12 (1970), No. 3, pp. 429–452).
- [An74] ANDRIANOV, A.N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2*, Russian Math. Surveys, 29:3 (1974), pp. 45–116, (Uspekhi Mat. Nauk 29:3 (1974) pp. 43–110).
- [An87] ANDRIANOV, A.N., *Quadratic Forms and Hecke Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.
- [AnZh95] ANDRIANOV, A.N., ZHURAVLEV, V.G., *Modular Forms and Hecke Operators*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 145, AMS, Providence, Rhode Island, 1995.
- [Boe-Pa2006] BÖCHERER, S., PANCHISHKIN, A.A., *Admissible p -adic measures attached to triple products of elliptic cusp forms*, accepted in Documenta Math. in March 2006 (a special volume dedicated to John Coates).
- [Boe-Schm] BÖCHERER, S., and SCHMIDT, C.-G., *p -adic measures attached to Siegel modular forms*, Ann. Inst. Fourier 50, N°5, 1375–1443 (2000).
- [Co] COATES, J. *On p -adic L -functions*. Sem. Bourbaki, 40eme annee, 1987-88, n° 701, Astérisque (1989) 177–178.

[Co-PeRi] COATES, J. and PERRIN-RIOU, B., *On p -adic L -functions attached to motives over \mathbb{Q}* , Advanced Studies in Pure Math. 17, 23–54 (1989)

[CoPB] R. COLEMAN, *p -adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. 127, N° 3 (1997), 417–479.

[CST98] R. COLEMAN, G. STEVENS, J. TEITELBAUM, *Numerical experiments on families of p -adic modular forms*, in Computational perspectives in Number Theory, ed. by D.A. Buell, J.T. Teitelbaum, Amer. Math. Soc. (1998), 143–158.

[Colm03] P. COLMEZ *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p -adique*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 919, juin 2003.

[CourPa] COURTIEU,M., PANCHISHKIN ,A.A., *Non-Archimedean L -Functions and Arithmetical Siegel Modular Forms*, Lecture Notes in Mathematics 1471, Springer-Verlag, 2004 (2nd augmented ed.)

[De79] DELIGNE P., *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc.Sympos.Pure Math. vol. 55. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979 , 313-346.

[DI98] DUKE W. , IMAMOGLU, Ö. *Siegel modular forms of small weight*. Math. Annalen 310 (1998), p. 73-82.

[Evd] EVDOKIMOV, S. A., *Dirichlet series, multiple Andrianov zeta-functions in the theory of Euler modular forms of genus 3*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 277 (1984), no. 1, 25–29.

[FVdG] FABER, C., VAN DER GEER, G. *Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes. I, II* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338, (2004) No.5, p. 381-384 and No.6, 467-470.

[Hecke] HECKE, E., *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktenentwicklung, I, II*. Math. Annalen 114 (1937), 1-28, 316-351 (Mathematische Werke. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1959, 644-707).

[Ha-Li-Sk] HARRIS, M., LI, Jian-Shu., SKINNER, Ch.M., *p -adic L -functions for unitary Shimura varieties*. Preprint, 2006.

[Ike01] IKEDA, T., *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$* , Ann. of Math. (2) 154 (2001), 641-681.

[Ike06] IKEDA, T., *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's Conjecture* Duke Mathematical Journal, **131**, 469-497 (2006)

[Jia96] JIANG, D., *Degree 16 standard L -function of $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GSp}(2)$* . Mem. Amer. Math. Soc. 123 (1996), no. 588 (196pp)

[Ku88] KUROKAWA, Nobushige, *Analyticity of Dirichlet series over prime powers*. Analytic number theory (Tokyo, 1988), 168–177, Lecture Notes in Math., 1434, Springer, Berlin, 1990.

[Maa76] MAASS, H. *Indefinite Quadratische Formen und Eulerprodukte*. Comm. on Pure and Appl. Math, 19, 689-699 (1976)

[Man96] MANIN, YU. I., *Selected papers of Yu. I. Manin*, World Scientific Series in 20th Century Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996. xii+600 pp.

[Ma-Pa05] MANIN, YU.I. and PANCHISHKIN, A.A., *Introduction to Modern Number Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49 (2nd ed.), Springer-Verlag, 2005, 514 p.

[Mi92] MIYAWAKI, I., Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Ser. A, Vol. 46, No. 2 (1992), pp. 307–339.

[Mur02] MUROKAWA, K., *Relations between symmetric power L-functions and spinor L-functions attached to Ikeda lifts*, Kodai Math. J. 25, 61-71 (2002)

[Pa94] PANCHISHKIN, A., *Admissible Non-Archimedean standard zeta functions of Siegel modular forms*, Proceedings of the Joint AMS Summer Conference on Motives, Seattle, July 20–August 2 1991, Seattle, Providence, R.I., 1994, vol.2, 251 – 292

[PaAnnIF94] PANCHISHKIN, A., *Motives over totally real fields and p -adic L-functions*. Annales de l’Institut Fourier, Grenoble, **44**, 4 (1994), 989–1023

[PaMMJ] PANCHISHKIN, A.A., *A new method of constructing p -adic L-functions associated with modular forms*, Moscow Mathematical Journal, 2 (2002), Number 2, 1-16

[PaTV] PANCHISHKIN, A.A., *Two variable p -adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Invent. Math. v. 154, N3 (2003), pp. 551 - 615

[PaHakuba5] PANCHISHKIN, A.A., *Triple products of Coleman’s families and their periods (a joint work with S. Boecherer)* Proceedings of the 8th Hakuba conference “Periods and related topics from automorphic forms”, September 25 - October 1, 2005

[PaSerre6] PANCHISHKIN, A.A., *p -adic Banach modules of arithmetical modular forms and triple products of Coleman’s families*, (for a special volume of Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics dedicated to Jean-Pierre Serre), 2006.

[PaVa] PANCHISHKIN, A., VANKOV, K. *On the numerator of the symplectic Hecke series of degree three*. Arxiv, math.NT/0604602 (2006).

[PaVaRnk] PANCHISHKIN, A., VANKOV, K., Rankin’s lemma of higher genus and explicit formulas for Hecke operators, *arXiv:math.NT/0610417*, (2006) 20 pp. to appear in Arithmetic and Geometry — Manin Festschrift.

[Shi63] SHIMURA, G., *On modular correspondences for $Sp(n, Z)$ and their congruence relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963), 824-828.

[Shi71] SHIMURA G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[ShiAr] G. SHIMURA, *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*, Mathematical Surveys and Monographs. 82. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). x, 302 p. (2000)

[Tam] TAMAGAWA T., *On the ζ -function of a division algebra*, Ann. of Math. 77 (1963), 387-405

- [Til-U] TILOUINE, J. and URBAN, E. , *Several variable p -adic families of Siegel-Hilbert cusp eigenforms and their Galois representations*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, 32 (1999) 499–574.
- [VaSp4] VANKOV, K. *Explicit formula for the symplectic Hecke series of genus four*. Arxiv, math.NT/0606492, (2006).
- [Vo] S. Vo, The spin L-function on the symplectic group $\mathrm{GSp}(6)$, Israel Journal of Mathematics 101 (1997), 1-71.
- [Wi95] A. WILES, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math., II. Ser. 141, No.3 (1995), 443–55.
- [Yosh81] YOSHIDA, H., *Siegel's Modular Forms and the Arithmetic of Quadratic Forms*, Inventiones math. 60, 193–248 (1980)
- [Yosh01] YOSHIDA, H., *Motives and Siegel modular forms*, American Journal of Mathematics, 123 (2001), 1171–1197.

О дзета-функциях и семействах зигелевых модулярных форм

А.А.Панчишин

Аннотация

Пусть p простое число, и $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ зигелева модулярная группа рода g . Изучаются p -адические семейства и L -функции зигелевых модулярных форм.

В частности, L -функции зигелевых модулярных форм описаны в терминах мотивных L -функций связанных с группой Sp_g , и приведены их аналитические свойства.

Критические значения спинорных L -функций обсуждаются в связи с p -адическими конструкциями. Установлена лемма Ранкина высшего рода. Сформулирована общая гипотеза о подъёме модулярных форм из произведения $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ в модулярные формы для группы GSp_{4m} (рода $g = 4m$).

Даются конструкции p -адических семейств зигелевых модулярных форм использующие построения Икеды–Мияваки.

Содержание

1 Введение	1
2 L-функции зигелевых модулярных форм	2
3 Мотивные L-функции для группы Sp_n, и их аналитические свойства	3
4 Критические значения, периоды и p-адические L-функции для группы Sp_3.	5
5 Лемма Ранкина высшего рода	6
6 Подъём модулярных форм из $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ в GSp_{4m}	10
7 Конструкции p-адических семейств зигелевых модулярных форм	12
8 Конструкции Икеды–Мияваки и их p-адические версии	16

1 Введение

Данная статья основана на материалах нескольких недавних докладов, в особенности, доклада в Московском Университете 2 февраля 2007 года на конференции “Диофантовы и аналитические проблемы в теории чисел” памяти А.О.Гельфонда.

Пусть $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{Z})$ зигелева модулярная группа рода g . Пусть p простое число, $\mathbf{T}(p) = \mathbf{T}(\underbrace{1, \dots, 1}_g, \underbrace{p, \dots, p}_g)$ p -оператор Гекке, и $[\mathbf{p}]_g = p\mathbf{I}_{2g} = \mathbf{T}(\underbrace{p, \dots, p}_{2g})$ скалярный оператор Гекке относительно группы Sp_g .

В статье обсуждаются следующие темы:

- 1) L -функции зигелевых модулярных форм
- 2) Мотивные L -функции для группы Sp_g , и их аналитические свойства
- 3) Критические значения спинорных L -функций и конструкции их p -адических аналогов
- 4) Лемма Ранкина высшего рода
- 5) Общая гипотеза о подъёме модулярных форм из произведения

$$GSp_{2m} \times GSp_{2m}$$

в модулярные формы для группы GSp_{4m} (рода $g = 4m$).

- 6) Конструкции p -адических семейств зигелевых модулярных форм
- 7) Конструкции Икеды-Мияваки и их p -адические версии.

2 L -функции зигелевых модулярных форм

Разложение Фурье зигелевых модулярных форм

Пусть $f = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a(\mathcal{T})q^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_k^n$ зигелева модулярная форма веса k и рода n на зигелевой верхней полуплоскости $\mathbb{H}_n = \{z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Напомним некоторые основные факты о формальном *разложении Фурье* формы f , используя символ

$$q^{\mathcal{T}} = \exp(2\pi i \mathrm{tr}(\mathcal{T}z)) = \prod_{i=1}^n q_{ii}^{\mathcal{T}_{ii}} \prod_{i < j} q_{ij}^{2\mathcal{T}_{ij}}$$

$\in \mathbb{C}[[q_{11}, \dots, q_{nn}]]$ $[q_{ij}, q_{ij}^{-1}]_{i,j=1, \dots, n}$, где $q_{ij} = \exp(2\pi(\sqrt{-1}z_{i,j}))$, и \mathcal{T} принадлежит полугруппе $B_n = \{\mathcal{T} = {}^t\mathcal{T} \geq 0 \mid \mathcal{T}$ полуцелая.

Операторы Гекке и сферическое отображения

Напомним, что локальная алгебра Гекке над \mathbb{Z} , обозначаемая $\mathcal{L}_{n,\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)]$, порождается следующими $n+1$ операторами Гекке:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(p) &:= T(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{p, \dots, p}_n), \\ \mathbf{T}_i(p^2) &:= T(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i, \underbrace{p^2, \dots, p^2}_{n-i}, \underbrace{p, \dots, p}_i), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\mathbf{T}_n(p^2) = [\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]_n = T(\underbrace{p, \dots, p}_{2n}) = p\mathbf{I}_{2n}$ и что сферическое отображение

$$\Omega : \mathcal{L}_{n, \mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \dots, \mathbf{T}_n(p^2)] \rightarrow \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

является некоторым инъективным гомоморфизмом колец.

Параметры Сатаке собственных функций операторов Гекке

Рассмотрим некоторую собственную функцию $f \in \mathcal{M}_k^n$ всех операторов Гекке $f \mapsto f|T$, $T \in \mathcal{L}_{n,p}$ (для всех простых чисел p), тогда $f|T = \lambda_f(T)f$.

Все числа $\lambda_f(T) \in \mathbb{C}$ задают некоторый гомоморфизм $\lambda_f : \mathcal{L}_{n,p} \rightarrow \mathbb{C}$ определяемый выбором $(n+1)$ -комплексных чисел $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ (параметров Сатаке формы f), так, что

$$\lambda_f(T) = \Omega(T)(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

В частности, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_f([\mathbf{p}]) &= \alpha_0^2 \alpha_1 \cdots \alpha_n = p^{kn - n(n+1)/2} \\ \lambda_f(\mathbf{T}(p)) &= \Omega(\mathbf{T}(p)) = \alpha_0(1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n) = \sum_{j=0}^n \alpha_0 s_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

L-функции, функциональное уравнение и мотивы для группы Sp_n (см. [Pa94], [Yosh01])

Определяются многочлены

- $Q_{f,p}(X) = (1 - \alpha_0 X) \prod_{r=1}^n \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (1 - \alpha_0 \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r} X),$
- $R_{f,p}(X) = (1 - X) \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1} X)(1 - \alpha_i X) \in \mathbb{Q}[\alpha_0^{\pm 1}, \dots, \alpha_n^{\pm 1}][X].$

Тогда спинорная L -функция $L(\mathrm{Sp}(f), s)$ и стандартная L -функция $L(\mathrm{St}(f), s, \chi)$ формы f (для $s \in \mathbb{C}$, и для всех характеров Дирихле χ определяются как следующие эйлеровы произведения:

- $L(\mathrm{Sp}(f), s, \chi) = \prod_p Q_{f,p}(\chi(p)p^{-s})^{-1}$
- $L(\mathrm{St}(f), s, \chi) = \prod_p R_{f,p}(\chi(p)p^{-s})^{-1}$

3 Мотивные L -функции для группы Sp_n , и их аналитические свойства

Связь с L -функциями и мотивами для группы Sp_n

Следуя [Pa94] и [Yosh01], напомним, что эти функции предположительно являются мотивными для всех $k > n$:

$$L(\mathrm{Sp}(f), s, \chi) = L(M(\mathrm{Sp}(f))(\chi), s), L(\mathrm{St}(f), s) = L(M(\mathrm{St}(f))(\chi), s), \text{ где}$$

и что мотивы $M(Sp(f))$ и $M(St(f))$ являются *чистыми* если f - подлинная параболическая форма (то есть не индуцированная как подъём с меньшего рода). При этом

- Мотив $M(Sp(f))$ определён над \mathbb{Q} , имеет коэффициенты в $\mathbb{Q}(\lambda_f(n))_{n \in \mathbb{N}}$, ранг 2^n , вес $w = kn - n(n+1)/2$, и тип Ходжа $\oplus_{p,q} H^{p,q}$, с

$$p = (k - i_1) + (k - i_2) + \cdots + (k - i_r), \quad (3.1)$$

$$q = (k - j_1) + (k - j_2) + \cdots + (k - i_s), \text{ где } r + s = n,$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq n,$$

$$\{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_s\} = \{1, 2, \dots, n\};$$

- Мотив $M(St(f))$ определён над \mathbb{Q} , имеет коэффициенты в $\mathbb{Q}(\lambda_f(n))_{n \in \mathbb{N}}$, ранг $2n+1$, вес $w = 0$, и тип Ходжа

$$H^{0,0} \bigoplus_{i=1}^n (H^{-k+i, k-i} \oplus H^{k-i, -k+i}).$$

Функциональное уравнение и критические значения

Согласно общей гипотезе Делинья (см. [De79]) о мотивных L -функциях, такие L -функции удовлетворяют функциональному уравнению определённому структурой Ходжа мотива:

$$\Lambda(Sp(f), kn - n(n+1)/2 + 1 - s) = \varepsilon(f) \Lambda(Sp(f), s), \text{ где}$$

$$\Lambda(Sp(f), s) = \Gamma_{n,k}(s) L(Sp(f), s), \varepsilon(f) = (-1)^{k2^{n-2}},$$

$$\Gamma_{1,k}(s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s), \Gamma_{2,k}(s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2), \text{ и}$$

$\Gamma_{n,k}(s) = \prod_{p < q} \Gamma_{\mathbb{C}}(s - p) \Gamma_{\mathbb{R}}^{a_+}(s - (w/2)) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1 - (w/2))^{a_-}$ для некоторых неотрицательных чисел a_+ и a_- , с $a_+ + a_- = w/2$, и $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$.

В частности, для $n = 3$ и $k \geq 5$, это гипотетическое функциональное уравнение имеет вид $\Lambda(Sp(f), s) = \Lambda(Sp(f), 3k - 5 - s)$, где

$$\Lambda(Sp(f), s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 3) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 1) L(Sp(f), s).$$

Для $k \geq 5$ критические значения в смысле Делинья [De79] таковы:

$$s = k, \dots, 2k - 5.$$

Аналитические свойства функций $L(Sp(f), s)$

(ср. с [Vo]).

Для изучения аналитических свойств функций можно использовать связь между собственными значениями $\lambda_f(T)$ и коэффициентами Фурье $a_f(\mathcal{T})$, где $T \in \mathcal{D}(\Gamma, S)$ пробегает операторы Гекке, а $\mathcal{T} \in B_n$ пробегает полуцелые неотрицательные симметрические матрицы. Согласно А.Н.Андреанову (см. [An67]), имеем:

$$D(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \mathbf{T}(p^\delta) X^\delta = \frac{E(X)}{F(X)},$$

где

$$\begin{aligned} E(X) \\ = 1 - p^2 (\mathbf{T}_2(p^2) + (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)[\mathbf{p}]_3) X^2 + (p + 1)p^4 \mathbf{T}(p)[\mathbf{p}]_3 X^3 \\ - p^7 [\mathbf{p}]_3 (\mathbf{T}_2(p^2) + (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)[\mathbf{p}]_3) X^4 + p^{15} [\mathbf{p}]_3^3 X^6 \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}[X]. \end{aligned}$$

Вычисление формального ряда Дирихле

Зная $E(X)$, вычисляется следующий формальный ряд Дирихле

$$D_E(s) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{T}_E(h) h^{-s} = \prod_p D_{E,p}(p^{-s}), \text{ где}$$

$$D_{E,p}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} \mathbf{T}_E(p^{\delta}) X^{\delta} = \frac{D_p(X)}{E(X)} = \frac{1}{F(X)} \in \mathcal{D}(\Gamma, S)[X].$$

Основное равенство

Для всех \mathcal{T} получаем следующее равенство

$$a_f(\mathcal{T}) L(Sp(f), s) = \sum_{h=1}^{\infty} a_f(\mathcal{T}, E, h) h^{-s}, \text{ где} \quad (3.2)$$

$$f | \mathbf{T}_E(h) = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a_f(\mathcal{T}, E, h) q^{\mathcal{T}}.$$

Действительно,

$$f | \mathbf{T}_E(h) = \lambda_f(\mathbf{T}_E(h)) f, \text{ и } L(Sp(f), s) = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_f(\mathbf{T}_E(h)) h^{-s}, \text{ поэтому}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} f | \mathbf{T}_E(h) h^{-s} = L(Sp(f), s) \cdot f = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a_f(\mathcal{T}, E, h) h^{-s} q^{\mathcal{T}},$$

и остаётся сравнить коэффициенты Фурье.

Тождество типа (3.2) является необходимым шагом в проблеме аналитического продолжения L -функций $L(Sp(f), s)$, а также при изучении их арифметических приложений, поскольку тождество (3.2) даёт метод вычисления специальных значений $L(Sp(f), s)$ через коэффициенты Фурье.

Напомним, что в случае стандартных L -функций $L(St(f), s)$ используются метод Ранкина-Сельберга, а также метод удвоения (“doubling method”) (см. [Pa94], [CourPa], и [Boe-Schm]).

4 Критические значения, периоды и p -адические L -функции для группы Sp_3 .

Гипотеза о p -адических L -функциях для группы Sp_3

Общая гипотеза Коутса и Перрэн-Риу (см. [Co-PeRi], [Co], [Pa94]), предсказывает для $n = 3$ и $k > 5$, и для комплексных мотивных L -функций $L(Sp(f), s)$, существование p -адических L -аналогов.

Зафиксируем вложение $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}}_p$, и пусть $\alpha_0(p)$ обозначает обратный корень (то есть обратное число к корню) многочлена $Q_{f,p}$ имеющий наименьшее p -адическое нормирование.

- “Условие Панчишикина” (см. [Ha-Li-Sk], [Pa94], [PaAnnIF94]) для существования ограниченных p -адических L -функций в данном случае принимает вид $\text{ord}_p(\alpha_0(p)) = 0$ Напомним, что это условие состоит в следующем:

для чистого мотива M ранга d ,
 $\text{Ордината точки } p\text{-полигона Ньютона с абсциссой } (d/2) = \text{ордината точки}$
 $\text{полигона Ходжа с абсциссой } (d/2)$

- При невыполнении этого условия, предположительно

существуют p -адические L -функции логарифмического роста $o(\log^h(\cdot))$
 $c h = [\text{ord}_p(\alpha_0(p))] + 1$, $2\text{ord}_p(\alpha_0(p)) = \text{разность}$
 $\text{ордината точки } p\text{-полигона Ньютона в } (d/2) - \text{ордината точки полигона Ходжа в } (d/2)$.

В случае унитарных групп, условие существования ограниченных p -адических L -функций обсуждалось в работе [Ha-Li-Sk].

5 Лемма Ранкина высшего рода

Наша следующая цель состоит в вычислении производящего ряда

$$D_p^{(1,1)}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta) X^\delta \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[[X]].$$

в терминах образующих алгебры Гекке $\mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}$:

$$\mathbf{T}(p) \otimes 1, \quad \mathbf{T}_1(p^2) \otimes 1, \quad [\mathbf{p}] \otimes 1, 1 \otimes \mathbf{T}(p), \quad 1 \otimes \mathbf{T}_1(p^2), \quad 1 \otimes [\mathbf{p}].$$

Теорема 5.1 ([PaVaRnk]) Для рода $n = 2$, имеет место следующее явное представление в виде рациональной дроби

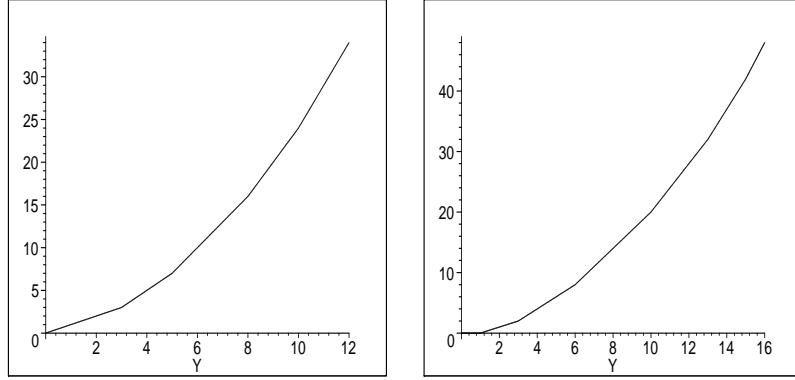
$$D_p^{(1,1)}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta) X^\delta = (1 - p^6[\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}] X^2) \frac{R(X)}{S(X)}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} R(X) &= 1 + r_1 X + \dots + r_{12} X^{12}, \quad c \quad r_1 = r_{11} = 0, \\ S(X) &= 1 + s_1 X + \dots + s_{16} X^{16}, \\ R(X), S(X) &\in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[X], \end{aligned}$$

и коэффициенты r_i и s_i явно приведены в Приложении к статье [PaVaRnk]

Приведем лишь полигоны Ньютона многочленов $R(X)$ и $S(X)$ относительно степеней p и X (см. Фиг. 1). Из наших вычислений следует, что все наклоны этих полигонов Ньютона – целые числа. Надеемся, что эти полигоны помогут найти геометические объекты связанные с многочленами $R(X)$ и $S(X)$, в духе недавних работ Фабера и Ван дер Геера см. [FVdG].

Рис. 1: Полигоны Ньютона многочленов $R(X)$ и $S(X)$ относительно степеней p и X , высоты 34 и 48, соотв.



Половина коэффициентов, именно s_9, \dots, s_{16} , может быть найдена через следующее простое функциональное уравнение:

$$s_{16-i} = (p^6 \mathbf{T}_2(p^2) \otimes \mathbf{T}_2(p^2))^{8-i} s_i \quad (i = 0, \dots, 8).$$

Доказательство: Напомним, что

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega^{(n=2)}(T(p^\delta)) X^\delta = \frac{1 - \frac{x_0^2 x_1 x_2}{p} X^2}{(1 - x_0 X)(1 - x_0 x_1 X)(1 - x_0 x_2 X)(1 - x_0 x_1 x_2 X)}.$$

Исходя из этого ряда можно получить формулу для $\Omega(T(p^\delta))$, рассматривая геометрические прогрессии

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (x_0 X)^{\nu_1} &= \frac{1}{1 - x_0 X}, & \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (x_0 x_1 X)^{\nu_2} &= \frac{1}{1 - x_0 x_1 X} \\ \sum_{\nu_3=0}^{\infty} (x_0 x_2 X)^{\nu_3} &= \frac{1}{1 - x_0 x_2 X}, & \sum_{\nu_4=0}^{\infty} (x_0 x_1 x_2 X)^{\nu_4} &= \frac{1}{1 - x_0 x_1 x_2 X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_x(T(p^\delta)) &= p^{-1} x_0^\delta (p x_1^{(3+\delta)} x_2 - p x_1 x_2^{(3+\delta)} - p x_1^{(2+\delta)} + p x_2^{(2+\delta)} - p x_1^{(3+\delta)} x_2^{(2+\delta)} \\ &\quad + p x_1^{(2+\delta)} x_2^{(3+\delta)} + p x_1 - p x_2 - x_1^{(2+\delta)} x_2^2 + x_1^{(1+\delta)} x_2 + x_1^{(2+\delta)} x_2^{(1+\delta)} - x_1^{(1+\delta)} x_2^{(2+\delta)} \\ &\quad + x_1^2 x_2^{(2+\delta)} - x_1 x_2^{(1+\delta)} - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) / ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(x_1 - x_2)) \\ &= -p^{-1} x_0^\delta ((1 - x_1 x_2)(p x_1 - x_2) x_1^{(\delta+1)} + (1 - x_1 x_2)(x_1 - p x_2) x_2^{(\delta+1)} \\ &\quad - (1 - p x_1 x_2)(x_1 - x_2)(x_1 x_2)^{(\delta+1)} - (p - x_1 x_2)(x_1 - x_2)) / \\ &\quad ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(x_1 - x_2)). \end{aligned}$$

Тензорное произведение локальных алгебр Гекке

Используя вторую группу переменных y_0, y_1, y_2 и Ω_y мы получаем тензорное произведение локальных алгебр Гекке

$$\begin{aligned}\Omega_x^{(n)} \otimes \Omega_y^{(n)} : \mathcal{L}_{n, \mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{n, \mathbb{Q}} &\rightarrow \mathbb{Q}[x_0, x_1, \dots, x_n; y_0, y_1, \dots, y_n], \text{ и} \\ \Omega_y^{(2)}(T(p^\delta)) &:= \Omega_x^{(2)}(T(p^\delta))|_{x=y}\end{aligned}$$

Произведение двух выражений $\Omega_x^{(2)}(T(p^\delta))$ и $\Omega_y^{(2)}(T(p^\delta))$ вычисляется явно:

$$\begin{aligned}\Omega_x^{(2)}(T(p^\delta)) \cdot \Omega_y^{(2)}(T(p^\delta)) &= p^{-2} x_0^\delta y_0^\delta (p x_1^{(3+\delta)} x_2 - p x_1^{(2+\delta)} - p x_1^{(3+\delta)} x_2^{(2+\delta)} \\ &+ p x_1^{(2+\delta)} x_2^{(3+\delta)} - p x_1 x_2^{(3+\delta)} + p x_2^{(2+\delta)} + p x_1 - p x_2 - x_1^{(2+\delta)} x_2^2 + x_1^{(1+\delta)} x_2 \\ &+ x_1^{(2+\delta)} x_2^{(1+\delta)} - x_1^{(1+\delta)} x_2^{(2+\delta)} + x_1^2 x_2^{(2+\delta)} - x_1 x_2^{(1+\delta)} - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) \\ &\times (p y_1^{(3+\delta)} y_2 - p y_1^{(2+\delta)} - p y_1^{(3+\delta)} y_2^{(2+\delta)} + p y_1^{(2+\delta)} y_2^{(3+\delta)} - p y_1 y_2^{(3+\delta)} \\ &+ p y_2^{(2+\delta)} + p y_1 - p y_2 - y_1^{(2+\delta)} y_2^2 + y_1^{(1+\delta)} y_2 + y_1^{(2+\delta)} y_2^{(1+\delta)} \\ &- y_1^{(1+\delta)} y_2^{(2+\delta)} + y_1^2 y_2^{(2+\delta)} - y_1 y_2^{(1+\delta)} - y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2) / \\ &((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(y_1 - y_2))\end{aligned}$$

Суммирование полученных выражений даёт следующий результат:

$$\begin{aligned}(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X)) &= \sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega_x^{(2)}(T(p^\delta)) \cdot \Omega_y^{(2)}(T(p^\delta)) X^\delta = \\ &- \frac{(p x_1 - x_2)(1 - p y_1 y_2) x_1 y_1 y_2}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 y_1 y_2 X)} \\ &+ \frac{x_2 y_1 (x_1 - p x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_2 y_0 y_1 X)} \\ &+ \frac{x_2 y_2 (x_1 - p x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 y_0 x_2 y_2 X)} \\ &- \frac{x_2 y_1 y_2 (x_1 - p x_2)(1 - p y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_2 y_0 y_1 y_2 X)} \\ &- \frac{x_1 (p x_1 - x_2)(p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 X)} \\ &- \frac{x_1 x_2 y_1 (1 - p x_1 x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 y_1 X)} \\ &- \frac{x_1 x_2 y_2 (1 - p x_1 x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 y_2 X)} \\ &+ \frac{y_1 y_2 (p - x_1 x_2)(1 - p y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 y_0 y_1 y_2 X)} \\ &+ \frac{x_1 x_2 (1 - p x_1 x_2)(p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(1 - y_1 y_2)(1 - x_0 x_1 x_2 y_0 X)} \\ &- \frac{x_1 y_1 (p x_1 - x_2)(p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 y_1 X)} \\ &+ \frac{x_1 y_2 (p x_1 - x_2)(y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1)(1 - x_2)(x_1 - x_2)(1 - y_1)(1 - y_2)(y_1 - y_2)(1 - x_0 x_1 y_0 y_2 X)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{x_2 (x_1 - p x_2) (p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1) (1 - x_2) (x_1 - x_2) (1 - y_1) (1 - y_2) (1 - y_1 y_2) (1 - x_0 x_2 y_0 X)} \\
& + \frac{x_1 x_2 y_1 y_2 (1 - p x_1 x_2) (1 - p y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1) (1 - x_2) (1 - x_1 x_2) (1 - y_1) (1 - y_2) (1 - y_1 y_2) (1 - x_0 x_1 x_2 y_0 y_1 y_2 X)} \\
& + \frac{(p - x_1 x_2) (p - y_1 y_2)}{p^2 (1 - x_1) (1 - x_2) (1 - x_1 x_2) (1 - y_1) (1 - y_2) (1 - y_1 y_2) (1 - x_0 y_0 X)} \\
& - \frac{y_1 (p - x_1 x_2) (p y_1 - y_2)}{p^2 (1 - x_1) (1 - x_2) (1 - x_1 x_2) (1 - y_1) (1 - y_2) (y_1 - y_2) (1 - x_0 y_0 y_1 X)} \\
& - \frac{y_2 (p - x_1 x_2) (y_1 - p y_2)}{p^2 (1 - x_1) (1 - x_2) (1 - x_1 x_2) (1 - y_1) (1 - y_2) (y_1 - y_2) (1 - x_0 y_0 y_2 X)}.
\end{aligned}$$

Свойства образа $(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X))$

Мы проверяем явным вычислением, что многочлены не зависящие от X в знаменателе образа $(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X))$, сокращается в кольце $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2][[X]]$, и общий знаменатель преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
& (1 - x_0 y_0 X) (1 - x_0 y_0 x_1 X) (1 - x_0 y_0 y_1 X) (1 - x_0 y_0 x_2 X) (1 - x_0 y_0 y_2 X) \\
& (1 - x_0 y_0 x_1 y_1 X) (1 - x_0 y_0 x_1 x_2 X) (1 - x_0 y_0 x_1 y_2 X) (1 - x_0 y_0 y_1 x_2 X) \\
& (1 - x_0 y_0 y_1 y_2 X) (1 - x_0 y_0 x_2 y_2 X) (1 - x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 X) (1 - x_0 y_0 x_1 y_1 y_2 X) \\
& (1 - x_0 y_0 x_1 x_2 y_2 X) (1 - x_0 y_0 y_1 x_2 y_2 X) (1 - x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2 X).
\end{aligned}$$

Более того, мы находим, что числитель состоит из множителя $(1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 x_2 y_2 X^2)$ и многочлена переменной X степени 12 с коэффициентами в $\mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]$ (постоянный член равен 1, а главный член равен $p^{-2} x_0^{12} y_0^{12} x_1^6 x_2^6 y_1^6 y_2^6 X^{12}$). Мы также находим, что множитель степени 12 не содержит членов степеней 1 и 11 по переменной X .

Мы получаем $(\Omega^{(2)} \otimes \Omega^{(2)})(D_p^{(1,1)}(X)) = \frac{(1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 x_2 y_2 X^2) R_{x,y}(X)}{S_{x,y}(X)}$, где $R_{x,y}(X) = 1 + r_{2,x,y} X^2 + \dots + r_{10,x,y} X^{10} + r_{12,x,y} X^{12}$ и $S_{x,y}(X) = 1 + s_{1,x,y} X + \dots + s_{16,x,y} X^{16} \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, X]$.

Выражение через операторы Гекке

Зная коэффициенты многочленов $R_{x,y}(X)$, $S_{x,y}(X) \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, X]$ (образов при отображении $\Omega_x \otimes \Omega_y$), можно восстановить их прообразы $R(X) = 1 + r_2 X^2 + \dots + r_{10} X^{10} + r_{12} X^{12}$ and

$$S(X) = 1 + s_1 X + \dots + s_{16} X^{16} \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[X].$$

Для этого используются образы генераторов (образующих)

$$\Omega_x(\mathbf{T}(p)^{\lambda_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\lambda_1} [\mathbf{p}]^{\lambda_2}) \Omega_y(\mathbf{T}(p)^{\mu_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\mu_1} [\mathbf{p}]^{\mu_2}),$$

и рассматривается система с неопределенными коэффициентами $K_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \mu_1, \mu_2}$ выражающая все мономы $\Omega_x(\mathbf{T}(p)^{\lambda_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\lambda_1} [\mathbf{p}]^{\lambda_2}) \Omega_y(\mathbf{T}(p)^{\mu_0} \mathbf{T}_1(p^2)^{\mu_1} [\mathbf{p}]^{\mu_2})$, вплоть до степени 12 для $R_{x,y}(X)$ (и ≤ 16 для $S_{x,y}(X)$) от переменной x_0 и от переменной y_0 . \square

Сравнение со случаем рода $n = 1$

Множитель $(1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 x_2 y_2 X^2)$ степени 2 от переменной X очень похож на случай рода $g = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega_x^{(1)}(T(p^\delta)) \cdot \Omega_y^{(1)}(T(p^\delta)) X^\delta &= \sum_{\delta=0}^{\infty} \frac{x_0^\delta (1 - x_1^{(1+\delta)})}{1 - x_1} \cdot \frac{y_0^\delta (1 - y_1^{(1+\delta)})}{1 - y_1} X^\delta \\
&= \frac{1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 X)} - \frac{y_1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 y_1 X)} \\
&\quad - \frac{x_1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 x_1 X)} + \frac{x_1 y_1}{(1 - x_1)(1 - y_1)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 X)} \\
&= \frac{1 - x_0^2 y_0^2 x_1 y_1 X^2}{(1 - x_0 y_0 X)(1 - x_0 y_0 x_1 X)(1 - x_0 y_0 y_1 X)(1 - x_0 y_0 x_1 y_1 X)}. \\
\sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta) X^\delta &= (1 - p^2 [\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}] X^2) \times \\
&\quad \times (1 - \mathbf{T}(p) \otimes \mathbf{T}(p) X + (p \mathbf{T}(p)^2 \otimes [\mathbf{p}] + p [\mathbf{p}] \otimes \mathbf{T}(p)^2 - 2p^2 [\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}]) X^2 \\
&\quad - p^2 \mathbf{T}(p) [\mathbf{p}] \otimes \mathbf{T}(p) [\mathbf{p}] X^3 + p^4 [\mathbf{p}]^2 \otimes [\mathbf{p}]^2 X^4)^{-1}.
\end{aligned}$$

6 Подъём модулярных форм из $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ в GSp_{4m}

Мотив произведения Ранкина рода $n = 2$

Пусть f и g две зигелевы модулярные формы весов k и l , $k > l$, собственные функции операторов Гекке, и пусть $M(Sp(f))$ и $M(Sp(g))$ – (гипотетические) спинорные мотивы форм f и g . Тогда $M(Sp(f))$ – мотив над \mathbb{Q} с коэффициентами в $\mathbb{Q}(\lambda_f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ранга 4, веса $w = 2k-3$, и типа Ходжа $H^{0,2k-3} \oplus H^{k-2,k-1} \oplus H^{k-1,k-2} \oplus H^{2k-3,0}$, а $M(Sp(g))$ – мотив над \mathbb{Q} с коэффициентами в $\mathbb{Q}(\lambda_g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ранга 4, веса $w = 2l-3$, и типа Ходжа $H^{0,2l-3} \oplus H^{l-2,l-1} \oplus H^{l-1,l-2} \oplus H^{2l-3,0}$.

Рассмотрим гомоморфизмы алгебр Гекке

$$\lambda_f : \mathcal{L}_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}, \lambda_g : \mathcal{L}_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}$$

заданные параметрами Сатаке $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ форм f и g , и пусть

$$\lambda_f \otimes \lambda_g : \mathcal{L}_{n,p} \otimes \mathcal{L}_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Тензорное произведение $M(Sp(f)) \otimes M(Sp(g))$

является мотивом \mathbb{Q} с коэффициентами в $\mathbb{Q}(\lambda_f(n), \lambda_g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ранга 16, веса $w = 2k+2l-6$, и типа Ходжа

$$\begin{aligned}
&H^{0,2k+2l-6} \oplus H^{l-2,2k+l-4} \oplus H^{l-1,2k+l-5} \oplus H^{2l-3,2k-3} \\
&H^{k-2,k+2l-4} \oplus H^{k+l-4,k+l-2} \oplus H_+^{k+l-3,k+l-3} \oplus H^{k+2l-5,k-1} \\
&H^{k-1,k+2l-5} \oplus H_-^{k+l-3,k+l-3} \oplus H^{k+l-2,k+l-4} \oplus H^{k+2l-4,k-2} \\
&H^{2k-3,2l-3} \oplus H^{2k+l-5,l-1} \oplus H^{2k+l-4,l-2} \oplus H^{2k+2l-6,0}.
\end{aligned}$$

Мотивные L -функции: аналитические свойства

Согласно общей гипотезе Делинья [De79] о мотивных L -функциях, применительно к спинорному мотиву F зигелевой модулярной группы $Sp_4(\mathbb{Z})$ рода $n = 4$ и веса $k > 5$, имеем $\Lambda(Sp(F), s) = \Lambda(Sp(F), 4k - 9 - s)$, где

$$\begin{aligned} \Lambda(Sp(F), s) &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 4) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 3) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 1) \\ &\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2k + 7) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2k + 6) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2k + 5) L(Sp(F), s), \end{aligned}$$

(сравните это функциональное уравнение с данным в [An74], p.115).

С другой стороны, для $m = 2$ и для двух параболических форм f и g для $Sp_2(\mathbb{Z})$ весов k, l , $k > l + 1$, гипотеза Делинья даёт $\Lambda(Sp(f) \otimes Sp(g), s) = \varepsilon(f, g) \Lambda(Sp(f) \otimes Sp(g), 2k + 2l - 5 - s)$, $|\varepsilon(f, g)| = 1$, где

$$\begin{aligned} \Lambda(Sp(f) \otimes Sp(g), s) &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - l + 2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - l + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 2) \\ &\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k + 1) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - 2l + 3) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k - l + 2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s - k - l + 3) \\ &\times L(Sp(f) \otimes Sp(g), s). \end{aligned}$$

При этом использована формула удвоения Гаусса $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1)$. Заметим, что при этом $a_+ = a_- = 1$, и что гипотетический мотив $M(Sp(f)) \otimes M(Sp(g))$ не имеет критических значений в случае рода 2.

Голоморфный подъём модулярных форм из произведения $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ в модулярные формы для группы GSp_{4m} (рода $g = 4m$)

Гипотеза 6.1 (о подъёме $GSp_{2m} \times GSp_{2m}$ в GSp_{4m}) Пусть f и g – две зигелевые модулярные формы рода $2m$ и весов $k > 2m$ и $l = k - 2m$, собственные функции операторов Гекке. Тогда существует зигелева модулярная форма F рода $4m$ и веса k с параметрами Сатаке $\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0, \gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2, \dots, \gamma_{2m} = \alpha_{2m}, \gamma_{2m+1} = \beta_1, \dots, \gamma_{4m} = \beta_{2m}$ для подходящего выбора параметров Сатаке $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ форм f и g .

Легко проверяется, что типы Ходжса мотивов $M(Sp(f)) \otimes M(Sp(g))$ и $M(Sp(F))$ совпадают (ранга 2^{4m}) (это следует из приведенного описания (3.1), и из формул типа Кюннета).

Свидетельство в пользу этой гипотезы происходит из конструкций типа Икеды–Мияваки ([Ike01], [Ike06], [Mur02]): пусть k – чётное положительное число, $h \in S_{2k}(\Gamma_1)$ эллиптическая параболическая форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке веса $2k$, $F_{2n} \in S_{k+n}(\Gamma_{2n})$ подъём Икеды формы h рода $2n$ (предполагается, что $k \equiv n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{N}$).

Далее, пусть $f \in S_{k+n+r}(\Gamma_r)$ произвольная зигелева параболическая форма рода r и веса $k + n + r$, с $n, r \geq 1$. Если взять $n = m, r = 2m, k := k + m, k + n + r := k + 3m$, то получается следующий пример выполнимости гипотезы о подъёме:

$$\begin{aligned} (f, g) &= (f, F_{2m}(h)) \mapsto \mathcal{F}_{h, f} \in S_{k+3m}(\Gamma_{4m}), \\ (f, g) &= (f, F_{2m}) \in S_{k+3m}(\Gamma_{2m}) \times S_{k+m}(\Gamma_{2m}). \end{aligned}$$

Другое свидетельство в пользу этой гипотезы происходит из рядов Эйзенштейна–Зигеля:

$$f = E_k^{2m} \text{ и } g = E_{k-2m}^{2m}$$

чётного рода $2m$ и весов k и $k - 2m$:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1, \alpha_1 = p^{k-2m}, \dots, \alpha_{2m} = p^{k-1}, \\ \beta_0 &= 1, \beta_1 = p^{k-4m}, \dots, \beta_{2m} = p^{k-2m-1},\end{aligned}$$

где полагается

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = p^{k-4m}, \dots, \gamma_{2m} = p^{k-1},$$

для параметров Сатаке рядов Эйзенштейна–Зигеля $F = E_k^{4m}$.

Замечание 6.2 Если сравнить L -функцию из гипотезы о подъёме (заданную параметрами Сатаке $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0, \gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \alpha_2, \dots, \gamma_{2m} = \alpha_{2m}, \gamma_{2m+1} = \beta_1, \dots, \gamma_{4m} = \beta_{2m}$ для подходящего выбора $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ и $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2m}$ параметров Сатаке форм f и g), мы увидим, эта L -функция соответствует тензорному произведению спинорных L -функций, но эта L -функция отличается от соответствующей L -функции в подъёме Иосиды (см. [Yosh81]) (являющейся произведением сдвинутых L -функций Гекке).

В связи с этим подъёмом необходимо упомянуть принцип функториальности Лэнглендса: знаменатели наших L -рядов отвечают локальным множителям L -функций (связанных с произведениями L -групп). Если рассмотреть гомоморфизмы

$${}^L GSp_{2m} = GSpin(4m+1) \rightarrow GL_{2^{2m}}, \quad {}^L GSp_{4m} = GSpin(8m+1) \rightarrow GL_{2^{4m}},$$

то мы увидим, что наша гипотеза совместима с гомоморфизмом L -групп

$$GL_{2^{2m}} \times GL_{2^{2m}} \rightarrow GL_{2^{4m}}, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \otimes g_2, \quad GL_n(\mathbb{C}) = {}^L GL_n.$$

Неясно однако, позволяет ли принцип функториальности Лэнглендса предсказать, будет ли этот подъём соответствовать голоморфной зигелевой модулярной форме.

7 Конструкции p -адических семейств зигелевых модулярных форм

Конструкции p -адических L -функций и модулярные символы

Наряду с комплексным параметром s возможно и использование p -адических параметров для построения аналогов L -функций и модулярных символов. Мы используем такие параметры как скручивание с характерами Дирихле с одной стороны, и параметр веса теории семейств модулярных форм, с другой стороны. Операция скручивания с характерами Дирихле является фундаментальной операцией с формальными степенными рядами, и p -адическая вариация таких характеров даёт пример аналитических семейств модулярных форм. Этот пример позволяет определить, а в некоторых случаях и вычислить, модулярные символы, связанные с автоморфными представлениями π алгебраической группы G над числовым полем, используя скрученные L -функции $L(s, \pi \otimes \chi, r)$ с центральным характером Дирихле χ (характером Гекке конечного порядка). В ряде случаев мы получили интегральные представления, дающие как комплеменно-аналитическое, так и p -адическое аналитическое продолжение L -функций. Рассматриваются методы построения таких L -функций и их семейств в случаях

$G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ (см. [Boe-Pa2006]), $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_{2m}$ (см. [Boe-Ha]), $G = \mathrm{GSp}_{2m} \times \mathrm{GSp}_{2m}$ используя метод удвоения и его p -адические варианты, которые, предположительно, применимы и для сверхсходящихся (“overconvergent”) семейств автоморфных форм, и уже развиты в более простом случае группы $G = \mathrm{GL}_2$ в работах Р.Колемана, Г.Стивенса ([CoPB]), автора ([PaSerre6], [PaTV]) и других.

p -адический подход

Рассмотрим поле Тэйта $\mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}}_p$ для простого числа p . Зафиксируем вложение $\overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i_p} \mathbb{C}_p$ и будем рассматривать алгебраические числа как p -адические посредством i_p . Для p -адического семейства $k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k)q^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[q]] \subset \mathbb{C}_p[[q]]$, коэффициенты Фурье $a_n(k)$ форм f_k , а также один из p -параметров Сатаке $\alpha(k) := \alpha_p^{(1)}(k)$ являются p -адическими аналитическими функциями $k \mapsto a_n(k)$ при $(n, p) = 1$. Традиционный пример p -адического семейства даётся рядами Эйзенштейна:

$$a_n(k) = \sum_{d|n, (d, p)=1} d^{k-1}, f_k = E_k, \alpha_p^{(1)}(k) = 1, \alpha_p^{(2)}(k) = p^{k-1}.$$

Существование p -адических семейств положительного наклона $\sigma > 0$ было установлено Р.Колеманом. Напомним, что наклон даётся равенством $\sigma = \mathrm{ord}_p(\alpha_p^{(1)}(k))$ (и предполагается постоянным в p -адической окрестности веса k). Пример простого числа $p = 7$, $f = \Delta$, $k = 12$, $a_7 = \tau(7) = -7 \cdot 2392$, $\sigma = 1$ был рассмотрен Р.Колеманом в [CoPB].

Мотивировки рассмотрения p -адических семейств

происходят из гипотезы Бёрча и Суиниертона-Дайера, см. [Colm03]. Для эллиптической параболической формы веса 2, нормализованной собственной функции операторов Гекке $f = f_2$, соответствующей эллиптической кривой E по Уайлсу [Wi95], рассматривается семейство, содержащее f . Можно попытаться приблизиться к $k = 2, s = 1$ по вертикальному направлению $k \rightarrow 2$, вместо $s \rightarrow 1$, что приводит к формуле связывающей производную по s в точке $s = 1$ у p -адической L -функции с производной по k в точке $k = 2$ у p -адической аналитической функции $\alpha_p(k)$, см. в [CST98]: $L'_{p,f}(1) = \mathcal{L}_p(f)L_{p,f}(1)$ with $\mathcal{L}_p(f) = -2 \frac{d\alpha_p(k)}{dk} \Big|_{k=2}$. Для применимости этой формулы необходимо существование нашей p -адической L -функции двух переменных, построенной в [PaTV].

Для построения p -адических L -функций двух переменных (k, s) , используется теория p -адического интегрирования. Используется понятие H -допустимой меры для натурального числа H определённого по наклону σ , который появляется в этой конструкции. Затем p -адическая L -функция двух переменных строится из H -допустимой меры со значениями в разных кольцах модулярных форм, в частности, форм близких к голоморфным (nearly holomorphic modular forms).

Модулярные формы, близкие к голоморфным, и метод канонической проекции

Пусть \mathcal{A} – некоторое поле. Имеются несколько p -адических подходов к изучению специальных значений L -функций, использующих метод канонической проекции (см. [PaTV]). В этом методе специальные значения и модулярные символы рассматриваются как \mathcal{A} -линейные формы

на пространствах модулярных форм с коэффициентами в \mathcal{A} . Модулярные формы, близкие к голоморфным (см. [ShiAr]) являются некоторыми формальными рядами

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a(n; R) q^n \in \mathcal{A}[[q]][R]$$

такие, что над $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ при подстановке $z = x + iy \in \mathbb{H}$, $R = (4\pi y)^{-1}$, ряд сходится к \mathcal{C}^{∞} -над \mathbb{H} данного веса k и характера Дирихле ψ . Коэффициенты $a(n; R)$ являются полиномами из $\mathcal{A}[R]$ ограниченной степени.

Семейства тройных произведений

дают свежий пример p -адических семейств для алгебраических групп высшего ранга. Этот аспект был изучен З.Бёхерером и А.Панчишкиным в работе [Boe-Pa2006]. Тройное произведение с характером Дирихле χ определяется как комплексная L -функция (эйлерово произведение степени 8):

$$L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \prod_{p \nmid N} L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, \chi(p)p^{-s}),$$

где

$$L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, X)^{-1} = \det \left(1_8 - X \begin{pmatrix} \alpha_{p,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,1}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,2}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,3}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,3}^{(2)} \end{pmatrix} \right).$$

Мы используем нормализованную L -функцию (см. [De79], [Co], [Co-PeRi]):

$$\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_3 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_2 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_1 + 1)L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi),$$

где $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. Гамма-множитель определяет *критические значения*

$$s = k_1, \dots, k_2 + k_3 - 2$$

функции $\Lambda(s)$, которые явно вычисляются (подобно классической формуле $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

Функциональное уравнение для $\Lambda(s)$ имеет тип

$$s \mapsto k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s.$$

Рассматривается произведение трёх собственных значений:

$$\lambda = \lambda(k_1, k_2, k_3) = \alpha_{p,1}^{(1)}(k_1)\alpha_{p,2}^{(1)}(k_2)\alpha_{p,3}^{(1)}(k_3)$$

с наклоном $\sigma = v_p(\lambda(k_1, k_2, k_3)) = \sigma(k_1, k_2, k_3) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ который предполагается *постоянным и положительным* для всех троек (k_1, k_2, k_3) в подходящей p -адической окрестности фиксированной тройки весов (k_1, k_2, k_3) .

Формулировка проблемы

для тройных произведений:

для трёх данных p -адических аналитических семейств \mathbf{f}_j наклона $\sigma_j \geq 0$, построить p -адическую аналитическую L -функцию четырёх переменных, связанную с тройным произведением Гарретта.

Метод канонической проекции позволяет построить интерполяцию специальных значений

$$(s, k_1, k_2, k_3) \longmapsto \Lambda(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, s, \chi)$$

в критических точках $s = k_1, \dots, k_2 + k_3 - 2$ для сбалансированных весов

$$k_1 \leq k_2 + k_3 - 2;$$

доказывается, что эти значения являются алгебраическими числами после деления на некоторые “периоды”. Однако конструкция p -адической L -функции прямо использует модулярные формы, вместо вычисления рассматриваемых специальных значений L -функций, причём сравнение специальных значений комплексной и p -адической L -функций проводится лишь *после построения*.

Основной результат для тройных произведений

1) Функция

$$\mathcal{L}_f : (s, k_1, k_2, k_3) \mapsto \frac{\langle \mathbf{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle}{\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}_0 \rangle}$$

зависит p -адически аналитически от четырёх переменных

$$(\chi \cdot y_p^r, k_1, k_2, k_3) \in X \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3;$$

2) Сравнение комплексных и p -адических значений: для всех (k_1, k_2, k_3) в некоторой p -адической окрестности
 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3 \subset X^3$, удовлетворяющих $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$, значения в $s = k_2 + k_3 - 2 - r$ совпадают с нормализованными критическими значениями

$$L^*(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, k_2 + k_3 - 2 - r, \chi) \quad (r = 0, \dots, k_2 + k_3 - k_1 - 2),$$

для характеров Дирихле $\chi \bmod Np^v$, $v \geq 1$.

3) Зависимость от $x \in X$: пусть $H = [\text{ord}_p(\lambda)] + 1$. Для произвольных фиксированных $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B}$ и $x = \chi \cdot y_p^r$ линейная форма (представляющая модулярные символы для тройных модулярных форм)

$$x \longmapsto \frac{\langle \mathbf{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi) \rangle}{\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}_0 \rangle},$$

продолжается до p -адической аналитической функции типа $o(\log^H(\cdot))$ по переменной $x \in X$.

Общая программа построения p -адических семейств и L -функций

Мы планируем распространить данный метод на ряд других ситуаций следующим образом:

- 1) Построение модулярных распределений Φ_j со значениями в бесконечномерной башне пространств модулярных форм $\mathcal{M}(\psi)$.
- 2) Применение оператора канонической проекции типа π_α на конечномерное подпространство $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$ of $\mathcal{M}(\psi)$.

- 3) Общий критерий допустимости. Семейство распределений $\pi_\alpha(\Phi_j)$ со значениями в $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$ даёт h -допустимую меру $\tilde{\Phi}$ со значениями в некотором модуле конечного ранга.
- 4) Применение некоторой линейной формы ℓ типа модулярного символа даёт распределения $\mu_j = \ell(\pi_\alpha(\Phi_j))$, и некоторую допустимую меру исходя из сравнений между модулярными формами $\pi_\alpha(\Phi_j)$.
- 5) Доказывается, что некоторые интегралы $\mu_j(\chi)$ распределений μ_j совпадают с определёнными специальными значениями L -функций; однако знание этих интегралов не требуется для определения мер (эти меры уже определены на этапе 4).
- 6) Доказывается результат о единственности построенных h -допустимых мер: они однозначно определяются заданием многих интегралов по характерам Дирихле (не обязательно по всем).
- 7) В большинстве случаев можно доказать некоторое функциональное уравнение для построенной меры μ (с использованием единственности из 6), и применяя архимедово функциональное уравнение для специальных значений L -функций (алгебраическими числами, вычисленными на этапе 5).

Эта стратегия уже применена в ряде случаев.

8 Конструкции Икеды–Мияваки и их p -адические версии

Подъём Икеды

Икеда обобщил в 1999 году (см. [Ike01]) подъём Сайто–Курокавы из модулярных форм одной переменной со значениями в зигелевых модулярных формах рода 2: при условии, что $n \equiv k(\text{mod}2)$ существует подъём эллиптической параболической формы, нормализованной собственной функции операторов Гекке $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$ до зигелевой параболической формы, собственной функции операторов Гекке $F \in S_{n+k}(\Gamma_{2n})$ такой, что стандартная дзета-функция $L(St(F), s)$ формы F (степени $2n$) даётся дзета-функцией Гекке формы f посредством равенства

$$\zeta(s) \prod_{j=1}^{2n} L(f; s + k + n - j).$$

(этот подъём было предложен Дьюком и Иммамоглу в [DI98]). Заметим, что параметры Сатаке формы F можно выбрать в виде $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2n}$, где

$$\beta_0 = p^{nk - n(n+1)/2}, \beta_i = \tilde{\alpha} p^{i-1/2} (i = 1, \dots, n), \beta_{n+i} = \tilde{\alpha}^{-1} p^{i-1/2},$$

и $(1 - \tilde{\alpha} p^{k-1/2} X)(1 - \tilde{\alpha}^{-1} p^{k-1/2} X) = 1 - a(p)X + p^{2k-1} X^2$, см. [Mur02], Lemma 4.1, p.65 (так что $\alpha = \tilde{\alpha} p^{k-1/2}$, $\tilde{\alpha} = \alpha p^{1/2-k}$ в наших прежних обозначениях).

Гипотеза Икеды–Мияваки

Пусть k чётное положительное число, $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$ эллиптическая параболическая форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке веса $2k$, $F_2 \in S_{k+1}(\Gamma_2) = Maass(f)$ подъём Маасса формы f , и вообще $F_{2n} \in S_{k+n}(\Gamma_{2n})$ подъём Икеды формы f (предполагается, что $k \equiv n \pmod{2}$, $n \in \mathbb{N}$). Затем положим $g \in S_{k+n+r}(\Gamma_r)$ зигелева модулярная форма,

нормализованная собственная функция операторов Гекке рода r и веса $k + n + r$, с $n, r \geq 1$. Мияваки предположил в [Mi92], а Икеда доказал в [Ike06] следующий результат: существует зигелева модулярная форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке $\mathcal{F}_{f,g} \in S_{k+n+r}(\Gamma_{2n+r})$, такая, что

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}, St) = L(s, g, St) \prod_{j=1}^{2n} L(s + k + n - j, f)$$

p-адические версии конструкций Икеды–Мияваки

Теперь рассмотрим *p*-адическое семейство

$$k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) q^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[q]] \subset \mathbb{C}_p[[q]],$$

с коэффициентами Фурье $a_n(k)$ форм f_k и с одним из *p*-параметров Сатаке $\alpha(k) := \alpha_p^{(1)}(k)$ заданными некоторыми аналитическими *p*-адическими функциями $k \mapsto a_n(k)$ для всех $(n, p) = 1$.

Тогда коэффициенты Фурье модулярных форм $F = F_k$ и $\mathcal{F}_{f_k,g} = \mathcal{F}_{f_k,g}$ могут быть выражены в явном виде через коэффициенты форм f_k , что даёт новые примеры *p*-адических семейств зигелевых модулярных форм.

Отметим, что параметры Сатаке формы F имеют вид $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2n}$, где

$$\beta_0 = p^{nk - n(n+1)/2}, \beta_i = \alpha(k) p^{i-k}, \beta_{n+i} = \alpha(k)^{-1} p^{k+i-1} (i = 1, \dots, n).$$

Признательность автора

Искренне благодарю Зигфрида Бёхерера, Стефена Гельбарта, Соломона Фридберга и Вадима Зудилина за ценные наблюдения и обсуждения.

В особенности я благодарен и признателен Юрию Валентиновичу Нестеренко за приглашение на Международную конференцию “Диофантовы и аналитические проблемы в теории чисел” памяти А.О.Гельфонда в Московском университете, и за предложение подготовить статью для Сборника трудов конференции.

Список литературы

- [An67] ANDRIANOV, A.N., *Shimura's conjecture for Siegel's modular group of genus 3*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 177 (1967), 755–758 = Soviet Math. Dokl. 8 (1967), 1474–1478.
- [An69] ANDRIANOV, A.N., *Rationality theorems for Hecke series and zeta functions of the groups GL_n and SP_n over local fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., Tom 33 (1969), No. 3, (Math. USSR – Izvestija, Vol. 3 (1969), No. 3, pp. 439–476).
- [An70] ANDRIANOV, A.N., *Spherical functions for GL_n over local fields and summation of Hecke series*, Mat. Sbornik, Tom 83 (125) (1970), No 3, (Math. USSR Sbornik, Vol. 12 (1970), No. 3, pp. 429–452).
- [An74] ANDRIANOV, A.N., *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2*, Russian Math. Surveys, 29:3 (1974), pp. 45–116, (Uspekhi Mat. Nauk 29:3 (1974) pp. 43–110).

[An87] ANDRIANOV, A.N., *Quadratic Forms and Hecke Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.

[AnZh95] ANDRIANOV, A.N., ZHURAVLEV, V.G., *Modular Forms and Hecke Operators*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 145, AMS, Providence, Rhode Island, 1995.

[Boe-Ha] BOECHERER, S., HEIM, B. *L-functions for $GSp_2 \times Gl_2$ of mixed weights*. Math. Z. 235, 11-51(2000)

[Boe-Pa2006] BOCHERER, S., PANCHISHKIN, A.A., *Admissible p -adic measures attached to triple products of elliptic cusp forms*, accepted in Documenta Math. in March 2006 (a special volume dedicated to John Coates).

[Boe-Schm] BOCHERER, S., and SCHMIDT, C.-G., *p -adic measures attached to Siegel modular forms*, Ann. Inst. Fourier 50, N°5, 1375-1443 (2000).

[Co] COATES, J. *On p -adic L-functions*. Sem. Bourbaki, 40eme année, 1987-88, n° 701, Asterisque (1989) 177-178.

[Co-PeRi] COATES, J. and PERRIN-RIOU, B., *On p -adic L-functions attached to motives over \mathbb{Q}* , Advanced Studies in Pure Math. 17, 23-54 (1989)

[CoPB] R. COLEMAN, *p -adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. 127, N° 3 (1997), 417-479.

[CST98] R. COLEMAN, G. STEVENS, J. TEITELBAUM, *Numerical experiments on families of p -adic modular forms*, in Computational perspectives in Number Theory, ed. by D.A. Buell, J.T. Teitelbaum, Amer. Math. Soc. (1998), 143-158.

[Colm03] P. COLMEZ *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p -adique*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 919, juin 2003.

[CourPa] COURTIEU, M., PANCHISHKIN, A.A., *Non-Archimedean L-Functions and Arithmetical Siegel Modular Forms*, Lecture Notes in Mathematics 1471, Springer-Verlag, 2004 (2nd augmented ed.)

[De79] DELIGNE P., *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc.Sympos.Pure Math. vol. 55. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979 , 313-346.

[DI98] DUKE W. , IMAMOGLU, Ö. *Siegel modular forms of small weight*. Math. Annalen 310 (1998), p. 73-82.

[Evd] EVDOKIMOV, S. A., *Dirichlet series, multiple Andrianov zeta-functions in the theory of Euler modular forms of genus 3*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 277 (1984), no. 1, 25-29.

[FVdG] FABER, C., VAN DER GEER, G. *Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes. I, II* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338, (2004) No.5, p. 381-384 and No.6, 467-470.

[Hecke] HECKE, E., *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung, I, II*. Math. Annalen 114 (1937), 1-28, 316-351 (Mathematische Werke. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1959, 644-707).

[Ha-Li-Sk] HARRIS, M., LI, Jian-Shu., SKINNER, Ch.M., *p-adic L-functions for unitary Shimura varieties*. Preprint, 2006.

[Ike01] IKEDA, T., *On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$* , Ann. of Math. (2) 154 (2001), 641-681.

[Ike06] IKEDA, T., *Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's Conjecture* Duke Mathematical Journal, **131**, 469-497 (2006)

[Jia96] JIANG, D., *Degree 16 standard L-function of $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GSp}(2)$* . Mem. Amer. Math. Soc. 123 (1996), no. 588 (196pp)

[Ku88] KUROKAWA, Nobushige, *Analyticity of Dirichlet series over prime powers*. Analytic number theory (Tokyo, 1988), 168–177, Lecture Notes in Math., 1434, Springer, Berlin, 1990.

[Maa76] MAASS, H. *Indefinite Quadratische Formen und Eulerprodukte*. Comm. on Pure and Appl. Math, 19, 689-699 (1976)

[Man96] MANIN, YU.I., *Selected papers of Yu.I. Manin*, World Scientific Series in 20th Century Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996. xii+600 pp.

[Ma-Pa05] MANIN, YU.I. and PANCHISHKIN, A.A., *Introduction to Modern Number Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49 (2nd ed.), Springer-Verlag, 2005, 514 p.

[Mi92] MIYAWAKI, I., Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions, *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Ser. A, Vol. 46, No. 2 (1992), pp. 307–339.

[Mur02] MUROKAWA, K., *Relations between symmetric power L-functions and spinor L-functions attached to Ikeda lifts*, Kodai Math. J. 25, 61-71 (2002)

[Pa94] PANCHISHKIN, A., *Admissible Non-Archimedean standard zeta functions of Siegel modular forms*, Proceedings of the Joint AMS Summer Conference on Motives, Seattle, July 20–August 2 1991, Seattle, Providence, R.I., 1994, vol.2, 251 – 292

[PaAnnIF94] PANCHISHKIN, A., *Motives over totally real fields and p-adic L-functions*. Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, **44**, 4 (1994), 989–1023

[PaMMJ] PANCHISHKIN, A.A., *A new method of constructing p-adic L-functions associated with modular forms*, Moscow Mathematical Journal, 2 (2002), Number 2, 1-16

[PaTV] PANCHISHKIN, A.A., *Two variable p-adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Invent. Math. v. 154, N3 (2003), pp. 551 - 615

[PaHakuba5] PANCHISHKIN,A.A., *Triple products of Coleman's families and their periods (a joint work with S.Boecherer)* Proceedings of the 8th Hakuba conference “Periods and related topics from automorphic forms”, September 25 - October 1, 2005

[PaSerre6] PANCHISHKIN,A.A., *p-adic Banach modules of arithmetical modular forms and triple products of Coleman's families*, (for a special volume of Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics dedicated to Jean-Pierre Serre), 2006.

[PaVa] PANCHISHKIN, A., VANKOV, K. *On the numerator of the symplectic Hecke series of degree three.* Arxiv, math.NT/0604602 (2006).

[PaVaRnk] PANCHISHKIN, A., VANKOV, K., Rankin's lemma of higher genus and explicit formulas for Hecke operators, *arXiv:math.NT/0610417*, (2006) 20 pp. to appear in *Arithmetic and Geometry — Manin Festschrift*.

[Shi63] SHIMURA, G., *On modular correspondences for $Sp(n, \mathbb{Z})$ and their congruence relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963), 824-828.

[Shi71] SHIMURA G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[ShiAr] G. SHIMURA, *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*, Mathematical Surveys and Monographs. 82. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). x, 302 p. (2000)

[Tam] TAMAGAWA T., *On the ζ -function of a division algebra*, Ann. of Math. 77 (1963), 387-405

[Til-U] TILOUINE, J. and URBAN, E. , *Several variable p -adic families of Siegel-Hilbert cusp eigenforms and their Galois representations*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, 32 (1999) 499–574.

[VaSp4] VANKOV, K. *Explicit formula for the symplectic Hecke series of genus four.* Arxiv, math.NT/0606492, (2006).

[Vo] S. Vo, The spin L-function on the symplectic group $\mathrm{GSp}(6)$, Israel Journal of Mathematics 101 (1997), 1-71.

[Wi95] A. WILES, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math., II. Ser. 141, No.3 (1995), 443–55.

[Yosh81] YOSHIDA, H., *Siegel's Modular Forms and the Arithmetic of Quadratic Forms*, Inventiones math. 60, 193–248 (1980)

[Yosh01] YOSHIDA, H., *Motives and Siegel modular forms*, American Journal of Mathematics, 123 (2001), 1171–1197.